XIV Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященная памяти академика А.Ф.Сидорова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБА БАЛКИ ИЗ ВЫСОКОПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА

Амосов К.А.[1,2], Киреев И.В.[1] , Садовский В.М.[1]
[1]Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск
[2]Сибирский федеральный университет, Красноярск

Введение

- В судостроении используются сферопласты — композитные материалы с включениями в виде тонкостенных пустотелых стеклянных сфер и другие хаотически армированные композиты.
- В автомобилестроении, авиастроении, аэрокосмической и других отраслях промышленности применяются металлические пены — новые искусственные материалы, которые обладают рядом важных свойств, таких как низкая плотность и теплопроводность, хорошие демпфирующие и звукопоглощающие свойства.
- В электронике используются ультралёгкие металлические пены, плотность которых ниже 10 мг/см^3.
- Еще одна перспективная область применения, развиваемая в последнее время – баллистическая защита. Экспериментальные исследования показали, что пористые металлы имеют хороший потенциал при изготовлении демпфирующих прослоек легкой брони.

Постановка задачи

- Дана балка толщины h, длины l. Балка сделана из высокопористого материала. Балку изгибают в центре, как показано на рисунке 2, и прилагают одинаковые усилия Q сверху и снизу.
- Основная задача работы – моделирование изгиба балки из высокопористого металла. Сама модель строится на основе диаграммы деформаций (σ-ε диаграмма).

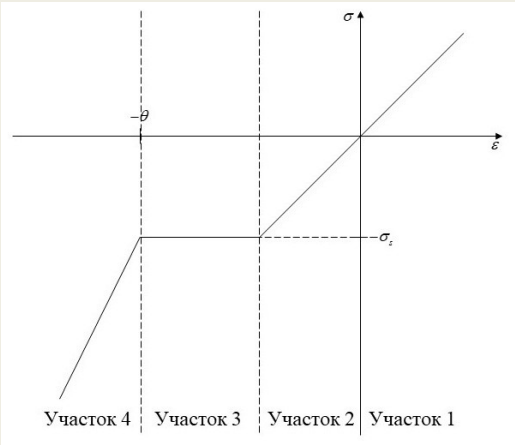

Рис. 1. Диаграмма деформаций (σ-ε диаграмма).

Рис. 2. Предполагаемый вид изгиба.

Уточненное уравнение плоского изгиба

- Для выведения уточненного уравнения плоского изгиба балки необходимо учесть эффект Тимошенко сдвига поперечных сечений балки и эффект Коссера относительного вращения пор.

$$Q = \begin{pmatrix} x' & \psi_x \\ y' & \psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta-\varphi) & -\sin(\theta-\varphi) \\ \sin(\theta-\varphi) & \cos(\theta-\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & \gamma \\ \gamma & 1-\nu\varepsilon \end{pmatrix}.$$

- Отсюда

$$\begin{cases} x' = (1+\varepsilon)\cos(\theta-\varphi) - \gamma\sin(\theta-\varphi), \\ y' = (1+\varepsilon)\sin(\theta-\varphi) + \gamma\cos(\theta-\varphi), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_x = \gamma\cos(\theta-\varphi) - (1-\nu\varepsilon)\sin(\theta-\varphi), \\ \psi_y = \gamma\sin(\theta-\varphi) + (1-\nu\varepsilon)\cos(\theta-\varphi). \end{cases}$$

Уточненное уравнение плоского изгиба

- В процессе выведения уточненного уравнения, вместо задачи с граничными условиями получим задачу с условиями Коши для уравнения второго порядка относительно функции *θ(s)*:

$$(D\theta')' = Q((1+\varepsilon)\cos(\theta-\varphi) - \gamma\sin(\theta-\varphi));$$

$$A\varepsilon = -Q\sin(\theta-\varphi),\ B\gamma = -Q\cos(\theta-\varphi),\ C\varphi = (D\theta')';$$

$$\theta(0) = \theta_0,\ \theta'(0) = 0.$$

- При учете эффекта Коссера уравнение оказывается неразрешенным относительно старшей производной. После исключения из него ε и γ получим

$$(D\theta')' = Q\cos(\theta-\varphi) + \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)\sin 2(\theta-\varphi).$$

Уточненное уравнение плоского изгиба

- Если $\varphi << 1$, то

$$\cos(\theta-\varphi)\simeq\cos\theta+\varphi\sin\theta,\ \ \sin 2(\theta-\varphi)\simeq\sin 2\theta+2\varphi\cos 2\theta;$$

$$(D\theta')'=Q\cos\theta+\frac{Q^2}{2}(\frac{1}{B}-\frac{1}{A})\sin 2\theta+\varphi Q(\sin\theta+Q(\frac{1}{B}-\frac{1}{A})\cos 2\theta).$$

- Следовательно,

$$(D\theta')'=\frac{Q\cos\theta+\frac{Q^2}{2}(\frac{1}{B}-\frac{1}{A})\sin 2\theta}{1-\frac{Q}{C}(\sin\theta+Q(\frac{1}{B}-\frac{1}{A})\cos 2\theta)}\equiv\Phi(\theta).$$

Уточненное уравнение плоского изгиба

- Система уравнений нормальная по Коши для применения метода Рунге-Кутты:

$$\begin{cases} D\dfrac{d\theta}{ds} = M, \\ \dfrac{dM}{ds} = \Phi(\theta), \\ \dfrac{dx}{ds} = \cos(\theta), \\ \dfrac{dy}{ds} = \sin(\theta); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0, \\ M(0) = 0. \end{cases}$$ - начальные данные.

Решение частного случая задачи

- При $D = const$, рассматриваемая задача сводится к следующей задаче Коши:

$$\frac{D}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = Q\frac{d}{ds}(\sin\theta),\ \theta(0) = \theta_0,\ \frac{d\theta(0)}{ds} = 0,$$

из которого получается интегральное представление решения в неявной форме:

$$J_1(\theta) = \sqrt{\frac{2D}{Q}}s, \qquad J_1(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta - \sin\theta_0}}.$$

- Для расчета необходимого усилия Q полудлины балки l справедлива формула:

$$Q = \frac{D}{2l^2}J_1\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

Решение частного случая задачи

- Координаты осевой линии балки определяются по формулам

$$x = \int_0^s \cos\theta\, ds = \sqrt{\frac{D}{2Q}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d(\sin\theta)}{\sqrt{\sin\theta - \sin\theta_0}} = \sqrt{\frac{2D}{Q}\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right)},$$

$$y = \int_0^s \sin\theta\, ds = \sqrt{\frac{D}{2Q}}\, J_2(\theta), \qquad J_2 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{\sin\theta - \sin\theta_0}}.$$

- Непосредственное вычисление интегралов дает

$$J_1(\theta) = \frac{2}{\sqrt{1+\sin\theta_0}} F\left(\sqrt{\frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{1-\sin\theta_0}}, i\sqrt{\frac{1-\sin\theta_0}{1+\sin\theta_0}}\right),$$

$$J_2(\theta) = 2\sqrt{1+\sin\theta_0}\; E\left(\sqrt{\frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{1-\sin\theta_0}}, i\sqrt{\frac{1-\sin\theta_0}{1+\sin\theta_0}}\right) - J_1(\theta),$$

где *F(x,k)* и *E(x,k)* – неполные эллиптические интеграл 1-го и 2-го рода в форме Якоби.

Решение частного случая задачи

- На рис. 3 изображены точные и численные решения, полученные на основе приведенных формул для упругой балки с параметрами l = 0,5м, h = 0,05м из алюминия с модулем Юнга E = 70ГПа для углов θ_0 = 0, -π/6, -π/3. Значения поперечной силы Q = 10, 13,5 и 22,3МПа, соответственно.

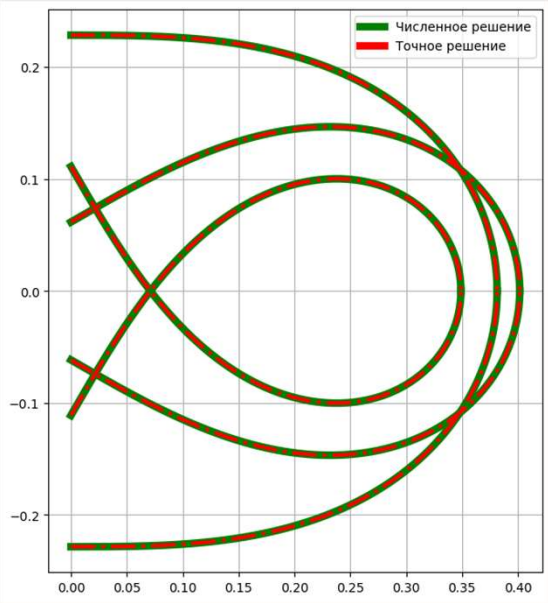

Рис. 3. Точное и численное решения частного случая задачи.

Полное численное решение задачи

- Данная задача также решается методом Рунге-Кутты, однако значения поперечной силы Q рассчитываются динамически, чтобы вычисленная длина балки соответствовала l = 0,5м.
- На рис. 4 изображены численные решения, полученные на основе решения методом Рунге-Кутты для упругой балки. Значения поперечной силы Q для заданных углов равны Q = 1, 5,4 и 13,2МПа, соответственно.

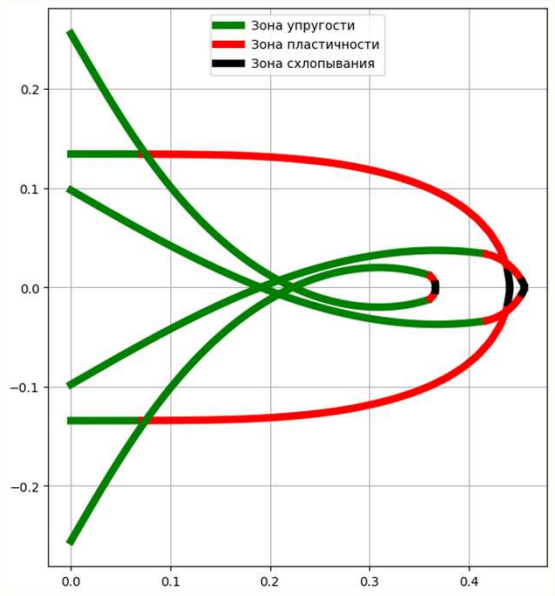

Рис. 4. Численное решение задачи.

Заключение

- В работе успешно выведено уточненное уравнение плоского изгиба балки из высокопористого металла. Данное уравнение учитывает эффекты Коссера и Тимошенко, что делает модель более точной.
- Приведено точное и численное решения данной задачи в случае постоянной жесткости.
- Приведено полное решение задачи численным методом Рунге-Кутты для переменной жесткости.