XIII ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ», ПОСВЯЩЕННАЯ ПАМЯТИ АКАДЕМИКА А.Ф. СИДОРОВА
Джанхот (Краснодарский край), 2–8 сентября 2024

О преобразовании Коула–Хопфа для уравнений Эйлера

А.А. Талышев

Новосибирский государственный университет

Если комплексная скорость $U(t,x,y) = u(t,x,y) - iv(t,x,y)$ является комплексно аналитической функцией переменной $z = x + iy$ и удовлетворяет комплексному уравнению Хопфа $U_t + UU_z = 0$, то вектор-функция (u, v) удовлетворяет следующей системе уравнений Эйлера (см., например, [1][1]:

$$u_t + uu_x + vu_y = 0, \quad v_t + uv_x + vv_y = 0, \quad u_x + v_y = 0, \quad v_x = u_y. \quad (1)$$

Преобразование Коула и Хопфа $w = -2\nu\theta_x/\theta$ отображает решения уравнения теплопроводности в решения уравнения Бюргерса

$$w_t + ww_x - \nu w_{xx} = -\frac{2\nu}{\theta}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\theta_x}{\theta}\right)(\theta_t - \nu\theta_{xx}).$$

[1] *Журавлева У. Н., Зубарев Н. М, Зубарева О. В, Карабут Е. А.* Алгоритм построения точных решений плоской нестационарной задачи о движении жидкости со свободной границей// Письма в ЖЭТФ. 2019. Т. 110, вып. 7, с. 443–448.)

Тогда, согласно работе [2][2], комплексное преобразование Коула и Хопфа

$$W = -2\nu\Theta_z/\Theta \tag{2}$$

отображает решения комплексного уравнения теплопроводности в решения комплексного уравнения Бюргерса

$$W_t + WW_x - \nu W_{xx} = 0, \tag{3}$$

где $\Theta = \Theta_1 + i\Theta_2$ и $W = w_1 + iw_2$. При предельном переходе $\nu \to 0$ решения уравнения (3) по аналогии с работой [3][3], наверное, сходятся к решениям системы (1).

[2] *Кренделев С. Ф., Талышев А. А.* Преобразования Беклунда систем уравнений в частных производных // Динамика жидкости со свободными границами. Новосибирск: ИГИЛ СОАН СССР, 1980, вып. 46., с. 166–170.

[3] *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.

Координатное представление преобразования (2) записывается в виде:

$$\begin{aligned} w_1 &= -2\nu \tfrac{\theta_1\theta_{1x}+\theta_2\theta_{2x}}{\theta_1^2+\theta_2^2}, \\ w_2 &= -2\nu \tfrac{\theta_1\theta_{2x}-\theta_2\theta_{1x}}{\theta_1^2+\theta_2^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Координатное представление уравнения Бюргерса (3) записывается в виде:

$$\begin{aligned} w_{1t} + w_1 w_{1x} + w_2 w_{1y} &= \nu w_{1xx}, \\ w_{2t} + w_1 w_{1x} + w_2 w_{2y} &= \nu w_{2xx}, \end{aligned} \tag{5}$$

а координатное представление комплексного уравнения теплопроводности в виде:

$$\begin{aligned} \theta_{1t} &= \nu \theta_{1xx}, \\ \theta_{2t} &= \nu \theta_{2xx}. \end{aligned} \tag{6}$$

Пример

В классе полиномов третьей степени по переменным x и y комплексно-аналитичекое решение системы (6) имеет вид

$$\theta_1 = -x^3c_7 - 3x^2yc_8 + 3xy^2c_7 + y^3c_8 + x^2c_5 - 2xyc_6 - y^2c_5 +$$

$$+x(-6c_7\nu t + c_3) + y(-6c_8\nu t + c_4) + 2c_5\nu t + c_1,$$

$$\theta_2 = x^3c_8 - 3x^2yc_7 - 3xy^2c_8 + y^3c_7 + x^2c_6 + 2xyc_5 - y^2c_6 +$$

$$+x(6c_8\nu t - c_4) + y(-6c_7\nu t + c_3) + 2c_6\nu t + c_2,$$

где c_j произвольные константы. Подстановка этих значений в (4) даст решения системы (5).

При проведении объемных вычислений использовалась система аналитических вычислений «Reduce 3.8» (http://reduce-algebra.sourceforge.net).

Спасибо за внимание

- *Журавлева У. Н., Зубарев Н. М, Зубарева О. В, Карабут Е. А.* Алгоритм построения точных решений плоской нестационарной задачи о движении жидкости со свободной границей// Письма в ЖЭТФ. 2019. Т. 110, вып. 7, с. 443–448.
- *Кренделев С. Ф., Талышев А. А.* Преобразования Беклунда систем уравнений в частных производных // Динамика жидкости со свободными границами. Новосибирск: ИГИЛ СОАН СССР, 1980, вып. 46., с. 166–170.
- *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.