

Применение дробно-линейного преобразования в задачах разделения матричного спектра и разложения многочлена на множители

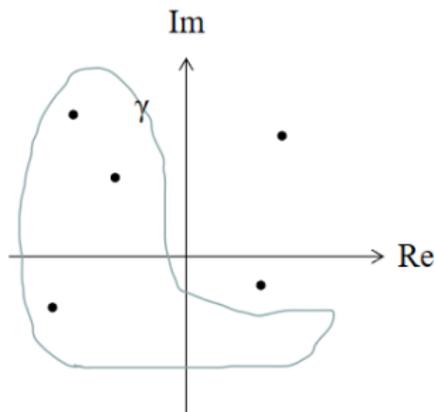
Бибердорф Э.А. Ван Ли

Постановка задачи дихотомии спектра

*Определить, есть ли на заданной кривой γ собственные значения матрицы A (матричного пучка $A-\lambda B$), т.е. вычислить критерий дихотомии $\omega(\gamma)$.

*Если на кривой собственные значения нет, то вычислить базисы инвариантных (в случае матрицы A) или приводящих (в случае матричного пучка $A-\lambda B$) подпространств.

*Привести матрицу (пучок) к клеточно-диагональной форме

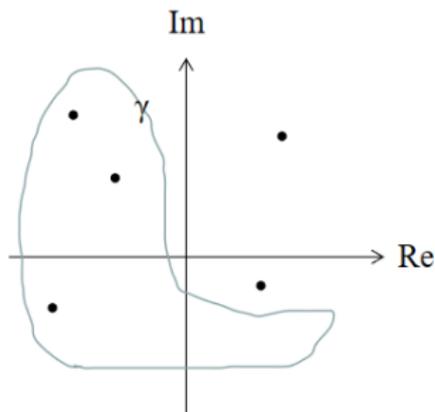


Постановка задачи дихотомии спектра

Пусть γ - замкнутая кривая, охватывающая часть спектра матрицы A , P - проектор на соответствующее инвариантное подпространство матрицы A , ω_γ - критерий дихотомии:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

$$\omega_\gamma = \|H\| = \left\| \oint_{\gamma} (A^* - \bar{\lambda}I)^{-1} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda \right\|$$



Дихотомия мнимой осью с использованием дробно-линейного преобразования

Подставим выражение $\lambda = \frac{\xi-1}{\xi+1}$ в равенство $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Rightarrow \det((A + I) - \xi(I - A)) = 0.$$

При этом

$$\operatorname{Re} \lambda \neq 0 \leftrightarrow |\xi| \neq 1$$

Таким образом, задача дихотомии спектра матрицы A относительно мнимой оси равнозначна задачи дихотомии спектра пучка $A_0 - \xi B_0$ относительно единичной окружности, где

$$A_0 = A + I, \quad B_0 = I - A.$$

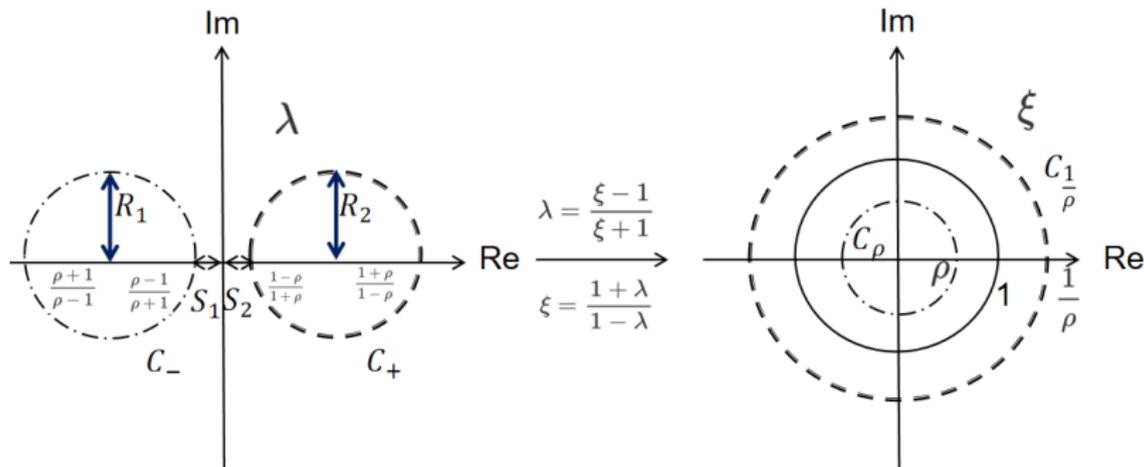
Критерий дихотомии:

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (A_0 - e^{i\varphi} B_0)^{-*} C (A_0 - e^{i\varphi} B_0)^{-1} d\varphi$$

Локализация спектра

Если $\|H\| < \infty$, то существует $\rho > 0$ такое, что между окружностями C_ρ и $C_{\frac{1}{\rho}}$ с центром в начале координат и радиусами ρ и $\frac{1}{\rho}$ нет собственных значений пучка $A_0 - \xi B_0$.

Следовательно спектр матрицы A делится на две части, лежащие строго внутри прообразов C_-, C_+ окружностей C_ρ и $C_{\frac{1}{\rho}}$



Свойства дробно-линейного преобразования

Theorem

Радиусы R_1 и R_2 окружностей C_- и C_+ и расстояния S_1 и S_2 от них до начала координат оцениваются следующим образом

$$R_{1,2} \leq \sqrt{\|H\|^2 - 1},$$

$$S_{1,2} \geq \|H\| - \sqrt{\|H\|^2 - 1}.$$

Пример 1

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 7 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Для данной матрицы норма критерия дихотомии:

$$\lg \|H\| = 2.3233,$$

P - проектор на инвариантное подпространство, соответствующее собственным значениям в левой полуплоскости, точность вычисления:

$$\|P^2 - P\| = 2.3556 \cdot 10^{-16}$$

$$\|PA - AP\| = 1.8455 \cdot 10^{-14}$$

Пример 2. Линейные спектральные портреты, сравнение двух подходов

Заметим, что дихотомия относительно прямой $\operatorname{Re}\lambda = a$, параллельной мнимой оси, равносильна дихотомии мнимой осью спектра матрицы $A - aI$.

Обозначим $H(a)$ критерий дихотомии прямой $\operatorname{Re}\lambda = a$. Изображение графика $\lg \|H(a)\|$ называется линейным спектральным портретом. "Пики" графика указывают на прямые, на которых лежит спектр.

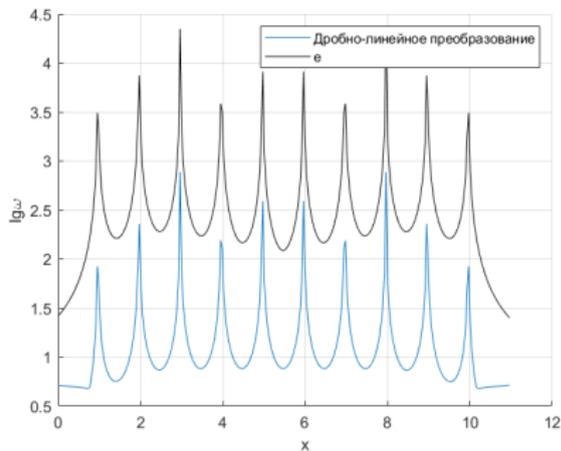
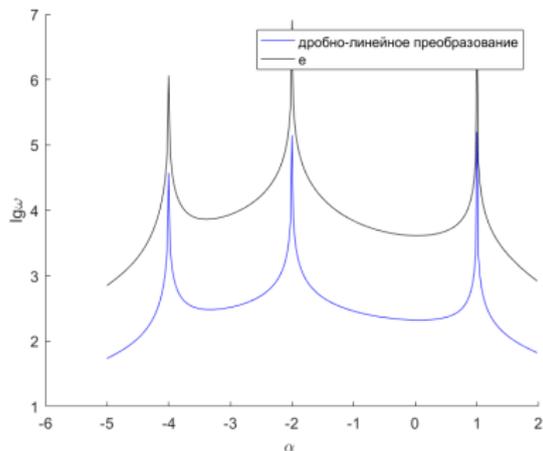
В работах других авторов для сведения задачи дихотомии мнимой осью к окружности используется экспоненциальное преобразование. На следующем слайде мы сравниваем оба подхода.

На рисунках на следующем слайде видно, что критерий дихотомии, полученный с помощью экспоненты, на порядки больше критерия, полученного новым способом. Разница становится критичной в окрестности собственных значений.

Пример 2. Линейные спектральные портреты, сравнение двух подходов

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 7 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 3 & \dots & & \\ & & & \dots & & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 10 \end{bmatrix}$$



Метод проверки отсутствия собственных значений матрицы на луче

Рассмотрим три спектральные задачи:

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad \det(A - \xi^2 I) = 0, \quad \det(\tilde{A} - \xi I) = 0, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\lambda(A) \notin \text{Re}^+ \Leftrightarrow \xi(A) \notin \text{Re} \Leftrightarrow \xi(\tilde{A}) \notin \text{Re}.$$

Таким образом, задача об отсутствии спектра матрицы A на положительной вещественной полуоси равносильна задаче об отсутствии спектра матрицы \tilde{A} на всей вещественной оси.

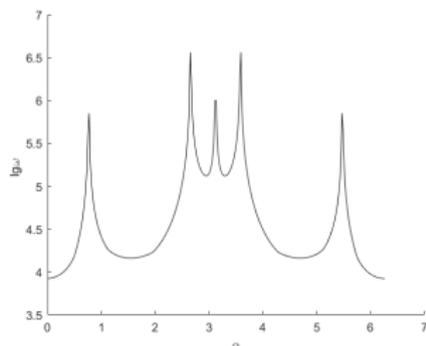
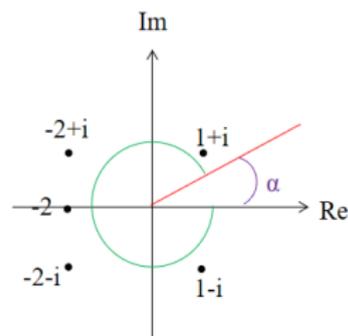
$\omega_{\text{Re}^+}(A) = \omega_{\text{Re}}(\tilde{A})$ - критерий отсутствия собственных значений A на Re^+

Для дальнейшего сведения к задаче на окружности снова используется дробно-линейное преобразование.

Пример 3. Проверка отсутствия собственных значений матрицы на луче

Рассмотрим семейство лучей с началом в точке $(0,0)$, образующих с положительной вещественной полуосью угол α . Для заданной матрицы построим график функции $\lg \omega_\alpha(A_3)$, который можно назвать угловым спектральным портретом.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 7 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$



Метод проверки отсутствия собственных значений матрицы на отрезке

Подставим выражение $\lambda = \frac{\xi a}{\xi - 1}$ в равенство $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Rightarrow \det(A - \xi(A - aI)) = 0$$

При этом

$$\lambda(A) \notin [0, a] \Leftrightarrow \xi \notin \text{Re}^+$$

Таким образом, задача об отсутствии спектра матрицы A на отрезке $[0, a]$ равносильно задаче об отсутствии спектра матричного пучка $A_0 - \xi B_0$ на положительной вещественной полуоси, где

$$A_0 = A, \quad B_0 = A - aI$$

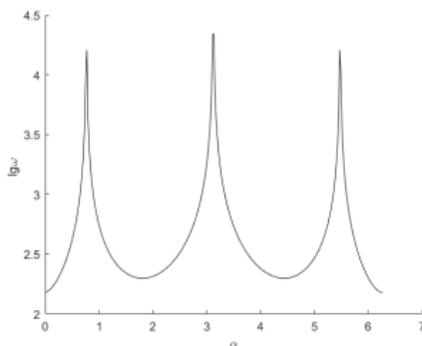
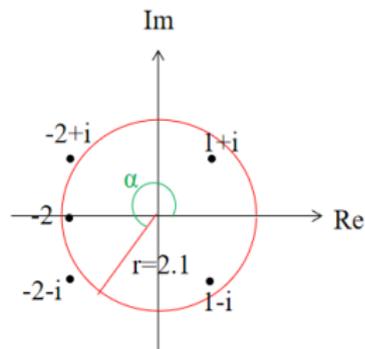
$$\omega_{[0, a]}(A) = \omega_{\text{Re}}(A_0, B_0)$$

- критерий отсутствия собственных значений A на $[0, a]$

Пример 4. Проверка отсутствия собственных значений матрицы на отрезке

Рассмотрим семейство отрезков длины $r = 2.1$ с началом в точке $(0,0)$, образующих с положительной вещественной полуосью угол α . Для заданной матрицы построим график зависимости функции $\lg \omega_{[0,a]}(A_3)$ от α .

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 7 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$



Разложение многочленов на множители

Известно, что корни λ_j полинома

$$f(\lambda) = f_0 + f_1\lambda + f_2\lambda^2 + \dots + f_n\lambda^n$$

совпадают с собственными значениями матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 \\ -\frac{f_0}{f_n} & -\frac{f_1}{f_n} & \dots & \dots & -\frac{f_{n-1}}{f_n} \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda_j I) = 0$$

Подставим выражение $\lambda_j = \frac{\xi_j - 1}{\xi_j + 1}$ в равенство $\det(A - \lambda_j I) = 0$

$$\Rightarrow \det(A_0 - \xi_j B_0) = 0, \text{ где } A_0 = A + I, B_0 = I - A.$$

$$\xi_j = \frac{1 + \lambda_j}{1 - \lambda_j} - \text{с. зн. } A_0 - \xi B_0$$

Разложение многочленов на множители

Применим итерационный алгоритм дихотомии единичной окружностью к пучку $A_0 - \xi B_0$:

$$\text{qr} \left(\begin{bmatrix} -B_k & 0 & A_k \\ A_k & -B_k & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & -B_{k+1} & A_{k+1} \end{bmatrix}.$$

В процессе итераций матрицы A_k, B_k расслаиваются на горизонтальные блоки:

$$A_k \rightarrow \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & g_0 & \cdots & g_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{qr } B_k \rightarrow \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_0 & \cdots & h_m \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(\lambda) = g_0 + g_1 \lambda + \cdots + g_l \lambda^l$$

$$h(\lambda) = h_0 + h_1 \lambda + \cdots + h_m \lambda^m$$

Разложение многочленов на множители

Полиномы

$$g(\lambda) = g_0 + g_1\lambda + \cdots + g_l\lambda^l, \quad h(\lambda) = h_0 + h_1\lambda + \cdots + h_m\lambda^m$$

являются множителями исходного полинома:

$$f(\lambda) = Cg(\lambda)h(\lambda).$$

Корни $g(\lambda)$ лежат в левой полуплоскости, корни $h(\lambda)$ – в правой.

Пример 5. Разделение многочлена на множители

Для следующего полинома имеет место разложение

$$f(\lambda) = 4 - 5\lambda^2 + \lambda^4 = g_T(\lambda)h_T(\lambda),$$

где

$$g_T(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2, \quad h_T(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

В результате вычислений согласно представленному алгоритму получаем предельные матрицы:

$$A_k \rightarrow \begin{bmatrix} -1.789 & -0.894 & 1.789 & 0.894 \\ 0 & -1.069 & -1.604 & -0.535 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{qr } B_k \rightarrow \begin{bmatrix} 1.789 & -0.894 & -1.789 & 0.894 \\ 0 & -1.069 & 1.604 & -0.535 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

То есть искомые множители имеют вид

$$g(\lambda) = -1.0690 - 1.6036\lambda - 0.5345\lambda^2$$

$$h(\lambda) = -1.0690 + 1.6036\lambda - 0.5345\lambda^2$$

Пример 5. Точность вычислений

В качестве меры погрешности можно использовать норму относительной разности векторов коэффициентов вычисленного и точного множителей, приведенных относительно старшего коэффициента:

$$\delta_g = \frac{\|g_2^{-1}(g_0, g_1, g_2) - (2, -3, 1)\|}{\|(2, -3, 1)\|} = 9.2888 \cdot 10^{-16}$$

$$\delta_h = \frac{\|h_2^{-1}(h_0, h_1, h_2) - (2, 3, 1)\|}{\|(2, 3, 1)\|} = 2.6539 \cdot 10^{-16}$$

Пример 6. Полиномы Чебышева

$T_k(\lambda) = \lambda^k + \dots$ - полином Чебышева k -ой степени.

Корни располагаются симметрично относительно мнимой оси.

При четных k существует разложение

$$T_k(\lambda) = g_k(\lambda)h_k(\lambda),$$

где корни g_k - отрицательные, h_k - положительные.

В результате вычислений:

$$\hat{g}_k(\lambda), \hat{h}_k(\lambda), \hat{T}_k(\lambda) = \hat{g}_k(\lambda)\hat{h}_k(\lambda)$$

Пример 6. Полиномы Чебышева

Пусть t_k, \hat{t}_k - векторы коэффициентов полиномов $T_k(\lambda), \hat{T}_k(\lambda)$

$$\delta_k = \frac{\|\hat{t}_k - t_k\|}{\|t_k\|}$$

k	4	5	6	7	8	9	10
$-\lg \delta_k$	15.09	-	14.68	-	13.84	-	11.82
$\lg \omega$	1.13	>16	2.34	>16	3.66	>16	5.04

Здесь ω – норма критерия дихотомии спектра пучка $A_0 - \xi B_0$ относительно единичной окружности.

При нечетных k алгоритм дихотомии не сходится, критерий дихотомии слишком большой, то есть разделение полинома на множители мнимой осью невозможно.

Список литературы

Годунов С.К. Круговая дихотомия матричного спектра// Сиб. мат.жур., 1986, Т. 27, N 5, С.24-37.

Годунов С.К. Задача о дихотомии спектра матрицы// Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, N 5, с. 57-59.

Малышев А.Н. Введение в вычислительную линейную алгебру // Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1991.

Булгаков А.Я., Годунов С. К. Круговая дихотомия матричного спектра// Сиб. мат. жур., 1988, Т. 29, N 5, С.59-70.

Бибердорф Э.А., Блинова М.А., Попова Н.И. Модификации метода дихотомии матричного спектра и их применение к задачам устойчивости// СибЖВМ, 2018, Т. 21, № 2, с. 139-153.

Список литературы

Костин В.И., Годунов С.К. Спектральные портреты матриц// Препр. ИМ СО РАН, Новосибирск, 1990.

Godunov S. K., Sadkane M. Elliptic dichotomy of a matrix spectrum// Linear Algebra and its Applications, 1996, 248:205-232.

Godunov S. K., Sadkane M. Elliptic dichotomy of a matrix spectrum, Linear Algebra and its Applications 248:205-232.

Бибердорф Э.А. Критерий дихотомии корней полинома единичной окружностью, Сиб. журн. индустр. матем., 3:1(2000), 16-32.

Спасибо за внимание