

XIII Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященная памяти академика А.Ф.Сидорова

Моделирование двухслойного разномодульного композитного материала с упругой прослойкой

Петраков И.Е.

Институт вычислительного моделирования
Сибирского отделения Российской академии наук

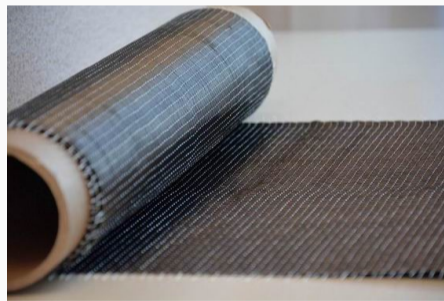
Джанхот, 2024

Композитные материалы

Композитные материалы представляют собой структурно неоднородные среды, состоящие из двух или более разнородных материалов, между которыми можно установить отчетливые границы. В работе рассматриваются волокнистые композитные материалы — композиты состоящие из армирующих нитей и связующей фазы (матрицы). К композитам такого рода, например, относится лед, армированный геосинтетическими нитями, стекловолоконные и углеволоконные композиты на эпоксидной основе и др.



Ледовая переправа



Углепластиковое полотно

Композиты обладают различными модулями упругости и пределами прочности в зависимости от состояния сжатия или растяжения. Лед, армированный геосинтетическими нитями, за счет жесткости и в то же время гибкости нитей обладает гораздо более высоким сопротивлением растяжению, чем сжатию. Двухслойная ледяная пластина с армированным нижним слоем при одних и тех же по абсолютной величине поперечных нагрузках изгибается меньше, если стрела прогиба направлена вниз, когда волокна растягиваются, а не вверх, когда они сжимаются.

- Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. № 2. С. 44–53.
- Шапиро Г. С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. № 2. С. 123–125.
- Матченко Н. М., Толоконников Л. А. О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах // Инж. журн. Механика твердого тела. 1968. № 6. С. 108–110.
- Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982.

В работе рассматривается сечение двухслойного композита, каждый слой которого представляет собой ортотропный материал армированный волокнами, расположенными параллельно друг другу. Слои обладают свойством разномодульности и связаны между собой изотропной упругой прослойкой. Схема, описывающая такой материал представлена на рисунке, где σ — тензор действительных напряжений, a_i — тензор модулей упругости при сжатии для i -го слоя, b_i — тензор дополнительных модулей при растяжении для i -го слоя.

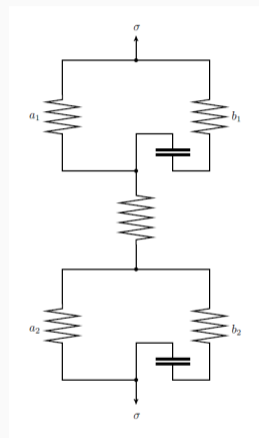


Рис. 1: Схема двухслойной пластины

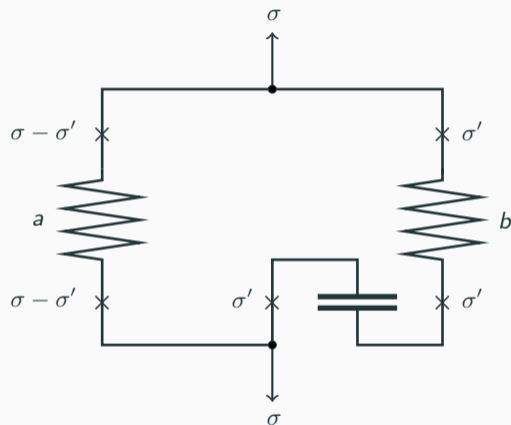


Рис. 2: Реологическая схема волокнистого композита.

σ — тензор действительных напряжений;
 σ' — тензор дополнительных напряжений;
 a — тензор модулей упругости при сжатии;
 b — тензор дополнительных модулей при растяжении.

Напряженно-деформированное состояние, в котором волокна не растягиваются, характеризуется модулями упругости матрицы, а при растяжении волокон материал приобретает дополнительное сопротивление.

Определяющее уравнение:

$$\sigma = (a + b) : \varepsilon - b : \Pi(\varepsilon).$$

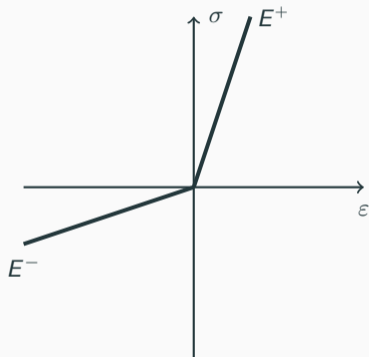


Рис. 3: Диаграмма одноосного деформирования.

Конусы допустимых деформаций и напряжений:

$$C = \{\varepsilon \mid \varepsilon \leq 0\}, \quad K = \{\sigma \mid \sigma \geq 0\}. \quad (1)$$

Операторы проекций:

$$P(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{при } \varepsilon > 0, \\ \varepsilon, & \text{при } \varepsilon \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\pi(\sigma) = \begin{cases} \sigma, & \text{при } \sigma > 0, \\ 0, & \text{при } \sigma \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Определяющие уравнения напряженно-деформированного состояния упругих композитов в терминах конечных линейных или нелинейных соотношений между тензорами напряжений σ и деформаций ε должны иметь потенциальное представление:

$$\sigma = \frac{\partial \Phi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\partial \Psi(\sigma)}{\partial \sigma}.$$

Φ и Ψ – это упругие потенциалы напряжений и деформаций, связанные между собой через преобразование Юнга:

$$\Psi(\sigma) = \sup_{\varepsilon} (\sigma : \varepsilon - \Phi(\varepsilon)),$$

$$\Phi(\varepsilon) = \sup_{\sigma} (\sigma : \varepsilon - \Psi(\sigma)),$$

где двоеточие обозначает двойную свертку тензоров.

Определяющее уравнение представимо в потенциальной форме со следующим потенциалом напряжений:

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon : a : \varepsilon + \frac{1}{2} (\varepsilon - \Pi(\varepsilon))^2.$$

Согласно формуле дифференцирования для оператора проектора

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\varepsilon - \Pi(\varepsilon))^2 = 2b : (\varepsilon - \Pi(\varepsilon)),$$

а следовательно

$$\frac{\partial \Phi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = a : \varepsilon + b : (\varepsilon - \Pi(\varepsilon)),$$

что в точности равно определяющему уравнению волокнистого композита. Выпишем потенциал деформаций, получить который можно с помощью преобразования двойственности:

$$\Psi(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma : a^{-1} : \sigma - \frac{1}{2} \|\pi(\bar{\sigma})\|^2,$$

где $\pi(\bar{\sigma})$ – проекция тензора условных напряжений $\bar{\sigma}$ на конус, сопряженный к конусу C по норме $\|\sigma\|^2 = \sigma : (a^{-1} + b^{-1}) : \sigma$.

Потенциал напряжений для двухслойной пластины с упругой прослойкой:

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon : a_1 : \varepsilon + \frac{1}{2} (\varepsilon - \Pi_1(\varepsilon))^2 + \frac{1}{2} \varepsilon : a_m : \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon : a_2 : \varepsilon + \frac{1}{2} (\varepsilon - \Pi_2(\varepsilon))^2,$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\varepsilon - \Pi_i(\varepsilon))^2 = 2b_i : (\varepsilon - \Pi_i(\varepsilon)),$$

что позволяет выписать следующее определяющее уравнение для двухслойной пластины с упругой прослойкой:

$$\frac{\partial \Phi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = a_1 : \varepsilon + b_1 : (\varepsilon - \Pi_1(\varepsilon)) + a_m : \varepsilon + a_2 : \varepsilon + b_2 : (\varepsilon - \Pi_2(\varepsilon)).$$

Потенциал деформаций:

$$\Psi(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma : a_1^{-1} : \sigma - \frac{1}{2} \|\pi_1(\bar{\sigma})\|^2 + \frac{1}{2} \sigma : a_m^{-1} : \sigma + \frac{1}{2} \sigma : a_2^{-1} : \sigma - \frac{1}{2} \|\pi_2(\bar{\sigma})\|^2.$$

Рассмотрим отдельный слой композитной пластины в декартовой системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$ связанной с волокнами армирования пластинки в недеформированном состоянии так, что x'_1 направлена вдоль волокон армирования, а x'_3 перпендикулярно плоскости пластинки.

Каждый отдельный слой является трансверсально-изотропным материалом и в системе координат связанной с волокнами армирования можно записать обращенный закон Гука:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1\nu_2} \begin{pmatrix} E_1 & \nu_1 E_2 & 0 \\ \nu_1 E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 - \nu_1\nu_2)G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix},$$

где E_1 – модуль Юнга вдоль волокон армирования, E_2 – модуль Юнга в направлении перпендикулярном армированию с соответствующими коэффициентами Пуассона ν_1, ν_2 , G – модуль сдвига.

Закон Гука:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1^k \nu_2^k} R(-\alpha_k) \begin{pmatrix} E_1^k & \nu_1^k E_2^k & 0 \\ \nu_1^k E_2^k & E_2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 - \nu_1^k \nu_2^k) G^k \end{pmatrix} R(\alpha_k) \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix},$$

где h_k – толщина k -го слоя, α_k – угол армирования k -го слоя ($k = 1, 2, \dots$), $R(\alpha)$ – матрица поворота на угол α :

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin 2\alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin 2\alpha \\ -\frac{\sin 2\alpha}{2} & \frac{\sin 2\alpha}{2} & \cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Тензор $a^{-1} + b^{-1}$ представим в матричном виде как

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} + \frac{1}{b} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_2} + \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G} + \frac{1}{2\gamma} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Конус деформаций C и сопряженный конус напряжений K для случая однонаправленного армирования примут следующий вид:

$$C = \{\varepsilon | \varepsilon_{11} \leq 0\}, \quad K = \{\sigma | \sigma_{11} \geq 0, \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0\}. \quad (5)$$

Норма связанная с тензором b будет равна:

$$|\varepsilon| = \sqrt{b\varepsilon_{11}^2 + \beta\varepsilon_{22}^2 + 4\gamma\varepsilon_{12}^2}. \quad (6)$$

Формулы для вычисления напряжений через деформации:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E_1(\varepsilon_{11} + \nu_2\varepsilon_{22})}{1 - \nu_1\nu_2} + b(\varepsilon_{11} - \Pi_{11}), \\ \sigma_{22} = \frac{E_2(\varepsilon_{22} + \nu_1\varepsilon_{11})}{1 - \nu_1\nu_2}, \\ \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12} \end{cases} \quad (7)$$

Формулы для вычисления деформаций по заданным напряжениям:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11} - \pi_{11}}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_{22}}{E_2}, \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \nu_1 \frac{\sigma_{11} - \pi_{11}}{E_1}, \\ \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G}. \end{cases} \quad (8)$$

Для получения уравнения плоского напряженного состояния воспользуемся вариационными принципом Лагранжа. Действительное распределение перемещений пластины минимизирует на множестве вариаций, согласованных с главными краевыми условиями функционал упругой энергии:

$$\sum_{i=1,2} \left(\int_{\Omega_i} \left(\frac{1}{2} \nabla \vec{u} : (a_i + b_i) : \nabla \vec{u} - b_i : \Pi_i(\varepsilon) \sigma : \nabla \vec{u} \right) d\Omega_i - \int_{\Gamma_i} \vec{q} \cdot \vec{u} d\Gamma_i \right) + \\ + \int_{\Omega_m} \left(\frac{1}{2} \nabla \vec{u} : a_m : \nabla \vec{u} \right) d\Omega_m - \int_{\Gamma_m} \vec{q} \cdot \vec{u} d\Gamma_m = 0,$$

где индекс i обозначает номер слоя, \vec{u} – вектор перемещений в рассматриваемом сечении пластины, ∇ – оператор Гамильтона, \vec{q} – вектор напряжения на границе пластины Γ_σ , a_i – тензора модулей упругости при сжатии, b_i – тензора дополнительных модулей при растяжении, a_m – тензор модулей упругости прослойки.

Для решения воспользуемся методом начальных напряжений и заменим определяющее уравнение итерационной формулой:

$$\sigma^k = \sum_{i=1,2} \left((a_i + b_i) : \varepsilon^k - \Delta\sigma_i^{k-1} \right) + a_m : \varepsilon^k, \quad \Delta\sigma_i^{k-1} = b_i : \Pi_i(\varepsilon^{k-1}),$$

на первом шаге которой тензор $\Delta\sigma^0$ считается тождественно равным нулю.

На k -ом шаге алгоритма задача сводится к минимизации следующего интегрального функционала:

$$\sum_{i=1,2} \left(\int_{\Omega_i} \left(\frac{1}{2} \nabla \vec{u} : (a_i + b_i) : \nabla \vec{u} - \Delta\sigma_i^{k-1} : \nabla \vec{u} \right) d\Omega_i - \int_{\Gamma_i} \vec{q} \cdot \vec{u} d\Gamma_i \right) + \\ + \int_{\Omega_m} \left(\frac{1}{2} \nabla \vec{u} : a_m : \nabla \vec{u} \right) d\Omega_m - \int_{\Gamma_m} \vec{q} \cdot \vec{u} d\Gamma_m = 0,$$

Для численного решения применялся метод конечных элементов. В качестве конечного элемента применяется треугольный элемент Лагранжа, с тремя узлами и следующими перемещениями заданными в узлах: u, v . В области Ω строится нерегулярная треугольная сетка. Для искомого вводится вектор обобщенных координат U размерности $2n$, где n – число узлов сетки. Функционал представляется в виде суммы интегралов по всем треугольникам сетки:

$$J(U) = \sum_{l=1}^m \iint_{\Omega_l} \left((U_l)^T S^T K(x_1, x_2) S U_l - b \Pi(S U_l^{k-1}) S U_l - q_l U_l \right) dx_1 dx_2 \quad (9)$$

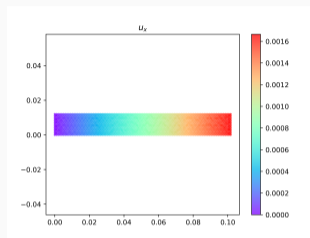
где Ω_l – область l -го конечного элемента, U^l – локальный вектор обобщенных координат, S_l – локальная матрица связи перемещений и деформаций, K – матрица упругих постоянных, q – глобальный вектор обобщенных сил, верхний индекс T означает транспонирование.

Растяжение-сжатие вдоль волокон армирования

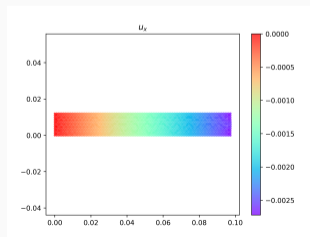
При проведении вычислительных экспериментов были рассмотрены двухслойные композитные пластины с различной толщиной слоев. Параметры упругости были взяты для углепластика $E_1^+ = 114$, $E_1^- = 57$, $E_2 = 48$, $G = 3.5$ ГПа, $\nu_1 = 0.19$, $\nu_2 = 0.02$.

В первой серии экспериментов рассматривалось растяжение-сжатие вдоль волокон. На рисунке 4 представлены перемещения по оси x для пластины с равными толщинами слоев, консольно закрепленной по левой стороне и нагружением по правой стороне пластины.

а



б



Растяжение-сжатие перпендикулярно волокнам армирования

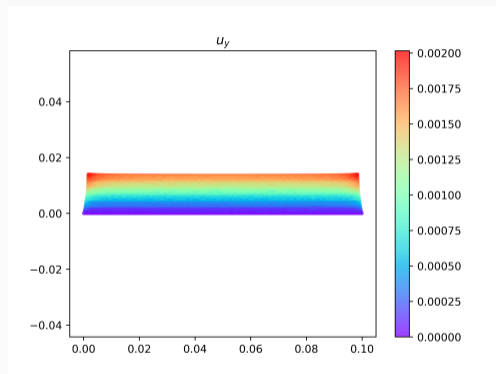
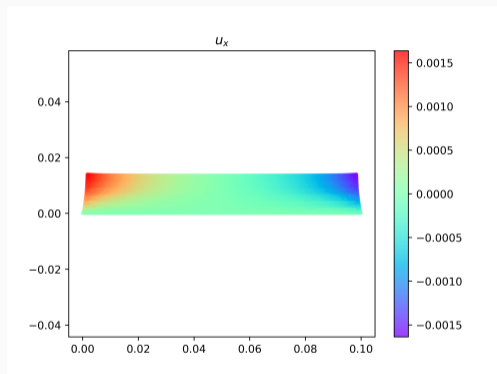


Рис. 5: Растяжение перпендикулярно волокнами

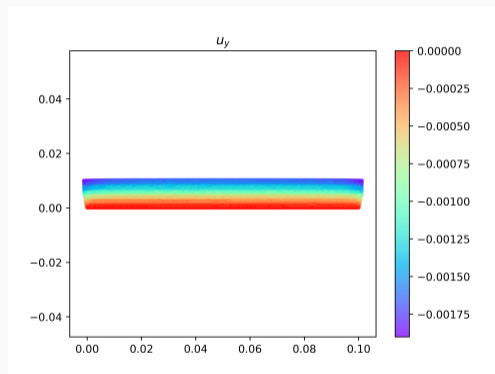
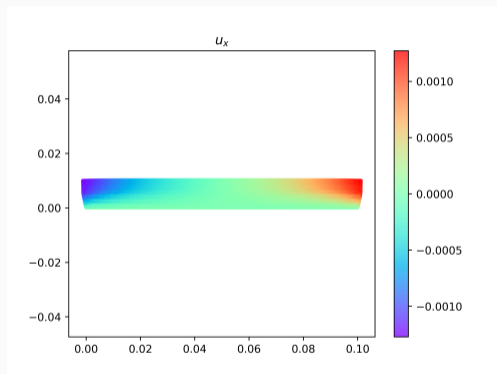


Рис. 6: Сжатие перпендикулярно волокнами

Изгиб сосредоточенной силой

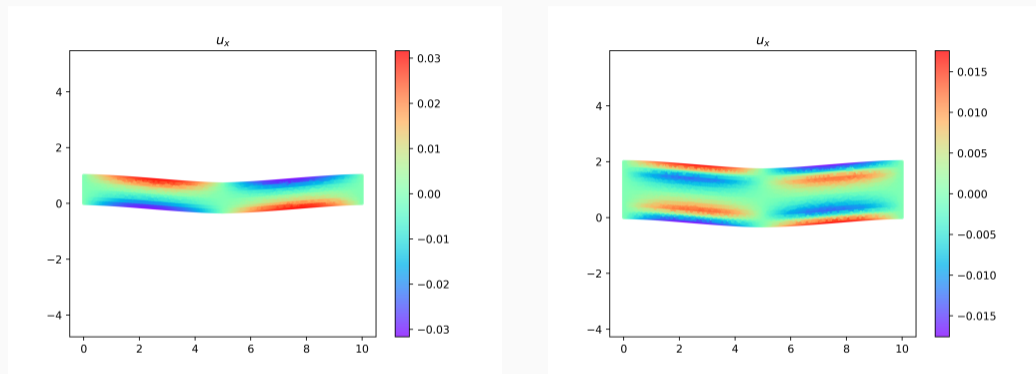


Рис. 7: Прогиб пластины под действием сосредоточенной силы

В третьей серии проводился расчет изгиба пластины под действием двух равных сосредоточенных сил расположенных в серединах верхней и нижней границы сечения. Проведено сравнение расчетов при учете и без учета разномодульности.

Для пластины толщиной 1.2 проведено сравнение величин прогиба в зависимости от учета разномодульности и толщины слоя прослойки. В таблице 1 приведены значения прогибов, где T_i – толщина прослойки, T_a – толщина армирования, w_d – прогиб с учетом разномодульности, w – прогиб без учета разномодульности.

Таблица 1: Прогиб пластины под действием сосредоточенной силы

T_i , мм	T_a , мм	w_d , мм	w , мм	δw , %
0.24	0.96	1.88	1.66	11%
0.48	0.72	1.99	1.78	10%
0.72	0.48	2.11	1.9	10%
0.96	0.24	2.24	2.08	7%

В работе рассматривается задача деформирования композитной пластины состоящей из двух разномодульных армированных слоев и упругой изотропной прослойки. Модель композитной пластины построена на основе обобщенного реологического метода, получены определяющие уравнения. Описан вычислительный алгоритм решения задачи расчета плоского напряженного состояния с помощью модифицированной функции Лагранжа и модели пластины учитывающей разное сопротивление материала растяжению и сжатию. Проведена серия вычислительных экспериментов, в результате которых показано влияние разномодульности плоское напряженное состояние пластины и показана возможность качественного прогнозирования зон растяжения-сжатия материала.