

Липецкий государственный технический университет

# **Влияние локализации полости на упругое состояние двусвязного тела**

Пеньков В.Б., Левина Л.В., Уланов В.Н., Копцева А.А.

[vbpenkov@mail.ru](mailto:vbpenkov@mail.ru)

# Цель и задачи

**Цель работы** – исследование влияния положения полости в двусвязном теле на напряженно-деформированное состояние тела (НДС).

## **Задачи:**

- построение НДС полостного тела в численно-аналитической форме средствами метода граничных состояний (МГС, «прямой» метод);
- использование подхода Шварца для эффективной оценки НДС;
- исследование влияния локализации полости на внутреннее состояние тела на примере полостного биконуса.

# Математическая модель теории упругости

Соотношения Коши (тензорно-индексная форма)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

Обобщённый закон Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

Уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (3)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформации,  $u_i$  – компоненты вектора перемещений,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\mu, \lambda$  – параметры Ламе,  $X_i$  – объёмные силы.

Уравнения Ламе

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = 0 \quad (4)$$

# Основные положения метода граничных состояний

Общее решение уравнений Ламе:

в случае односвязного ограниченного тела

$$u_i = 4(1-\nu)B_i + x_j B_{i,j} - x_i B_{j,j} \quad (5.1)$$

в случае внешности односвязной ограниченной полости

$$u_i = 4(1-\nu)B_i - (x_j B_j)_{,i}, \quad (5.1)$$

где  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $B_i$  - компонента гармонического вектора.

Внутреннее состояние

$$\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\} \quad (6)$$

Граничное состояние

$$\gamma = \{u_i, p_i\} \quad (7)$$

Разложение в ряды Фурье

$$u_i = \sum_k c_k u_i^{(k)}, \quad \sigma_{ij} = \sum_k c_k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad \varepsilon_{ij} = \sum_k c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}. \quad (8)$$

$$u_i = \sum_k c_k u_i^{(k)}, \quad p_i = \sum_k c_k p_i^{(k)} \quad (9)$$

# Основные положения метода граничных состояний

Гармонический вектор

$$\mathbf{V} \in \left( \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \right) \quad (10)$$

Для внутренности ограниченной области

$$\varphi \in \{x, y, z, yz, xz, xy, x^2 - z^2, y^2 - z^2 \dots\} \quad (11)$$

для внешности полости

$$\varphi \in \left\{ 1/r, x/r^3, y/r^3, z/r^3, yz/r^5, xz/r^5, xy/r^5 \dots \right\} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}, \quad (12)$$

где  $r$  – модуль радиус-вектора, отсчитываемого от  $(0, 0, z_0)$

# Алгоритм Шварца

МГС можно использовать напрямую при решении задач со многими полостями, но это ведет к формированию объектов большой размерности.

Метод Шварца разбивает постановку на ряд простых задач, каждая из которых решается с помощью МГС и при этом объекты большой размерности не возникают.

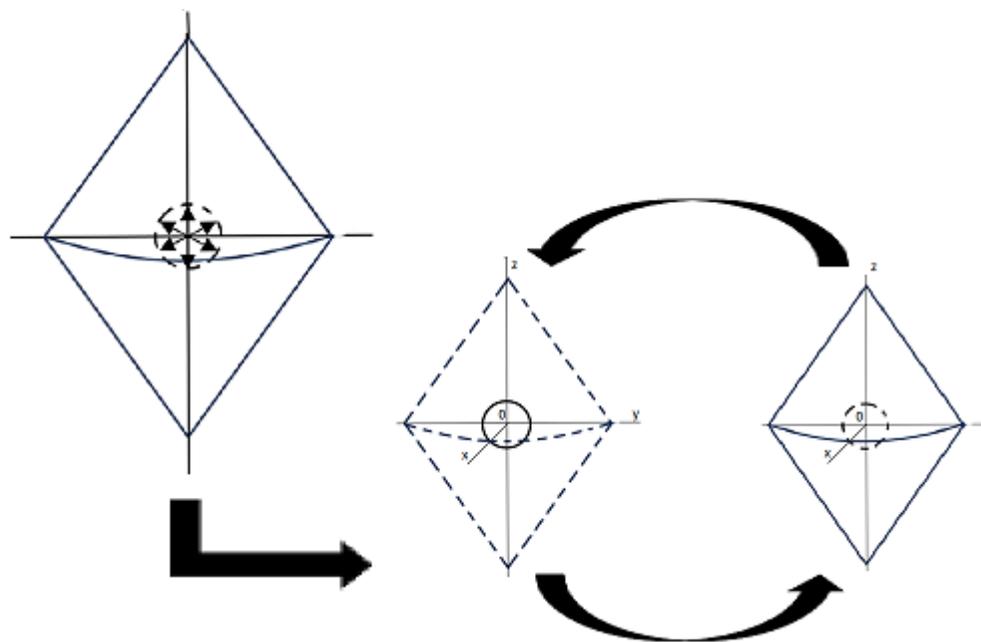


Рисунок 1 – Последовательность решения алгоритма Шварца

## Эффективный алгоритм Шварца

Шаг 0. Решается краевая задача для тела, занимающего область  $V^-$

ГУ соответствуют заданным требованиям. Отслеживаются состояния  $\xi_{\langle 0 \rangle}^- \leftrightarrow \gamma_{\langle 0 \rangle}^-$

Форма границы  $\partial V^+$  позволяет оценить след  $\bar{\gamma}^+$  состояния  $\xi_{\langle 0 \rangle}^-$  и внести поправку в ГУ на

$\partial V^+$ . После этого решается краевая задача для  $\partial V^+$  со скорректированными ГУ и строятся

состояния  $\xi_{\langle k \rangle}^+ \leftrightarrow \gamma_{\langle k \rangle}^+$

Шаг k. Оценивается поправка  $\bar{\gamma}^+$  для ГУ на  $\partial V^-$  и выполняется коррекция ГУ\* в задаче для

$V^-$ . Решается краевая задача для  $V^-$ , вычисляется след  $\bar{\gamma}^+$  от  $\xi_{\langle k \rangle}^-$  на  $\partial V^+$

## Напряженно-деформированное состояние полостного биконуса

Рассматривается однородное изотропное упругое тело в форме биконуса, содержащего сферическую полость (рис.2). Положение полости варьируется вдоль оси биконуса параметром  $h$ . Требуется оценить влияние положения полости на НДС тела и установить предельное значение положения центра полости, допускающее упругое состояние предразрушения. Граничные условия: боковые поверхности – свободны от нагрузки, полость нагружена постоянным внутренним давлением  $p_0$ .

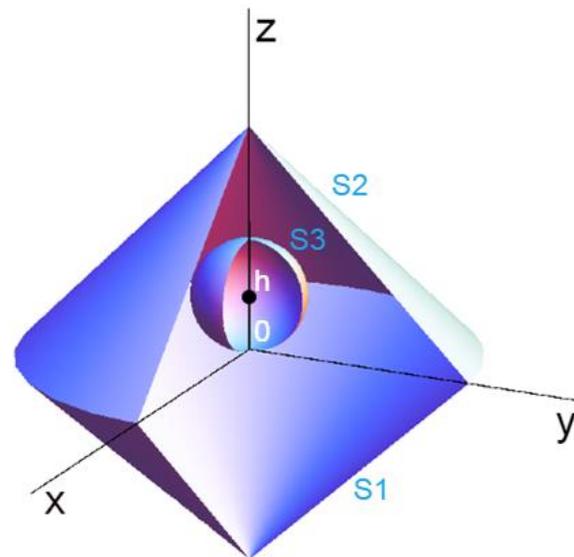


Рисунок 2 – Полостной биконус

# Постановка задачи

Граничные условия:

$$\mathbf{p}|_{S_1} = \{0, 0, 0\}; \mathbf{p}|_{S_2} = \{0, 0, 0\}; \mathbf{p}|_{S_3} = \{\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta\};$$

Параметризация:

- подобласть  $V_1$  :  
$$\{x \rightarrow r \cos \varphi, y \rightarrow r \sin \varphi\}$$
- подобласть  $V_2$  :  
$$\{x \rightarrow r \cos \varphi \cos \theta, y \rightarrow r \cos \theta \sin \varphi, z \rightarrow r \sin \theta\}$$
- граница  $S_1$  :  
$$\{x \rightarrow (1 + z) \cos \varphi, y \rightarrow (1 + z) \sin \varphi\}$$
- граница  $S_2$  :  
$$\{x \rightarrow (1 - z) \cos \varphi, y \rightarrow (1 - z) \sin \varphi\}$$
- граница  $S_3$  :  
$$\{x \rightarrow \frac{1}{4} \cos \theta \cos \varphi, y \rightarrow \frac{1}{4} \cos \theta \sin \varphi, z \rightarrow \frac{\sin \theta}{4}\}$$

# Результаты решения

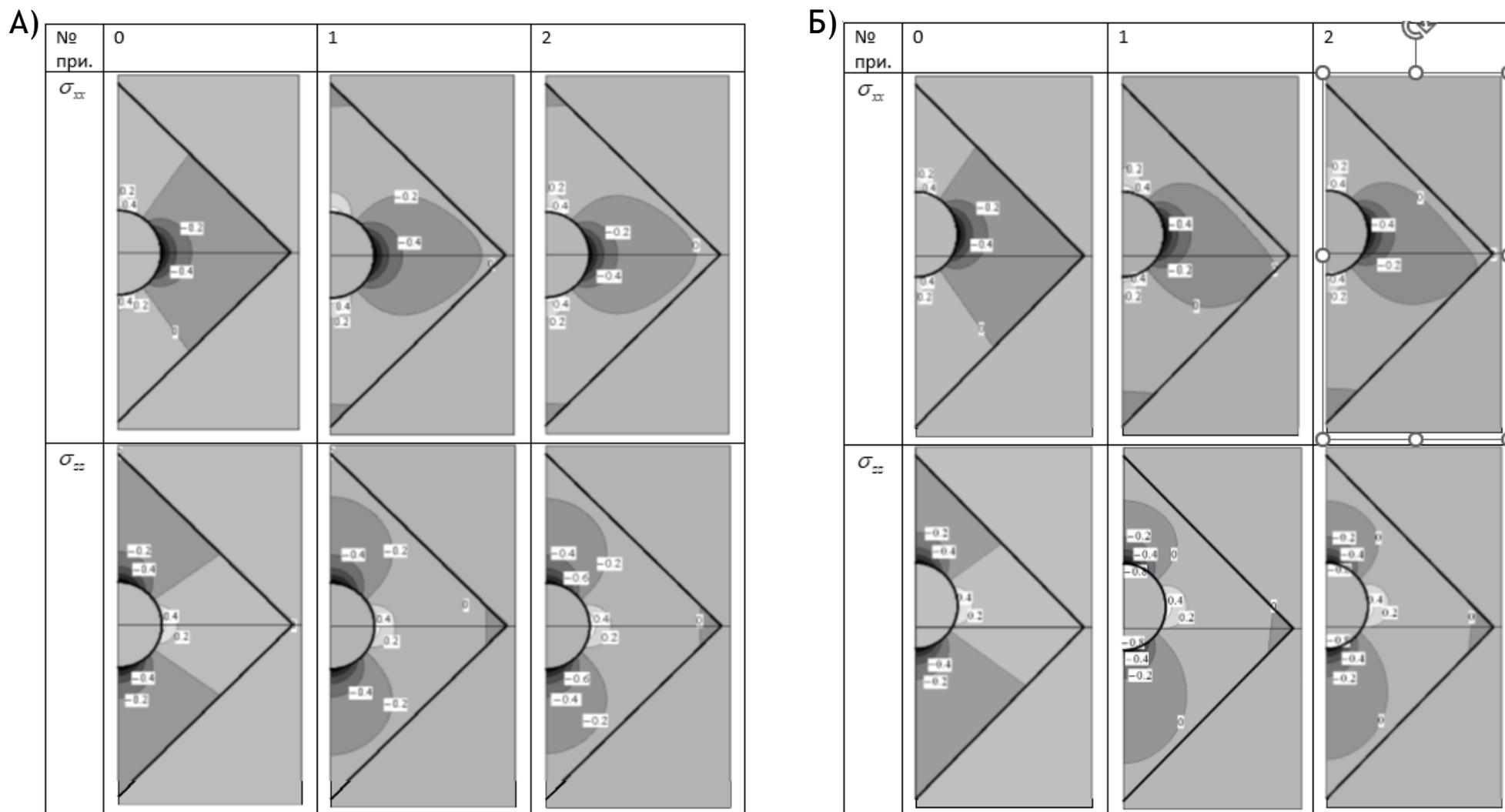


Рисунок 3 – Изолинии напряжений: А) центр полости в  $\{0,0,0\}$ ;  
 Б) центр полости в  $\{0,0,1/8\}$ ; В) центр полости в  $\{0,0,1/4\}$

# Результаты решения для

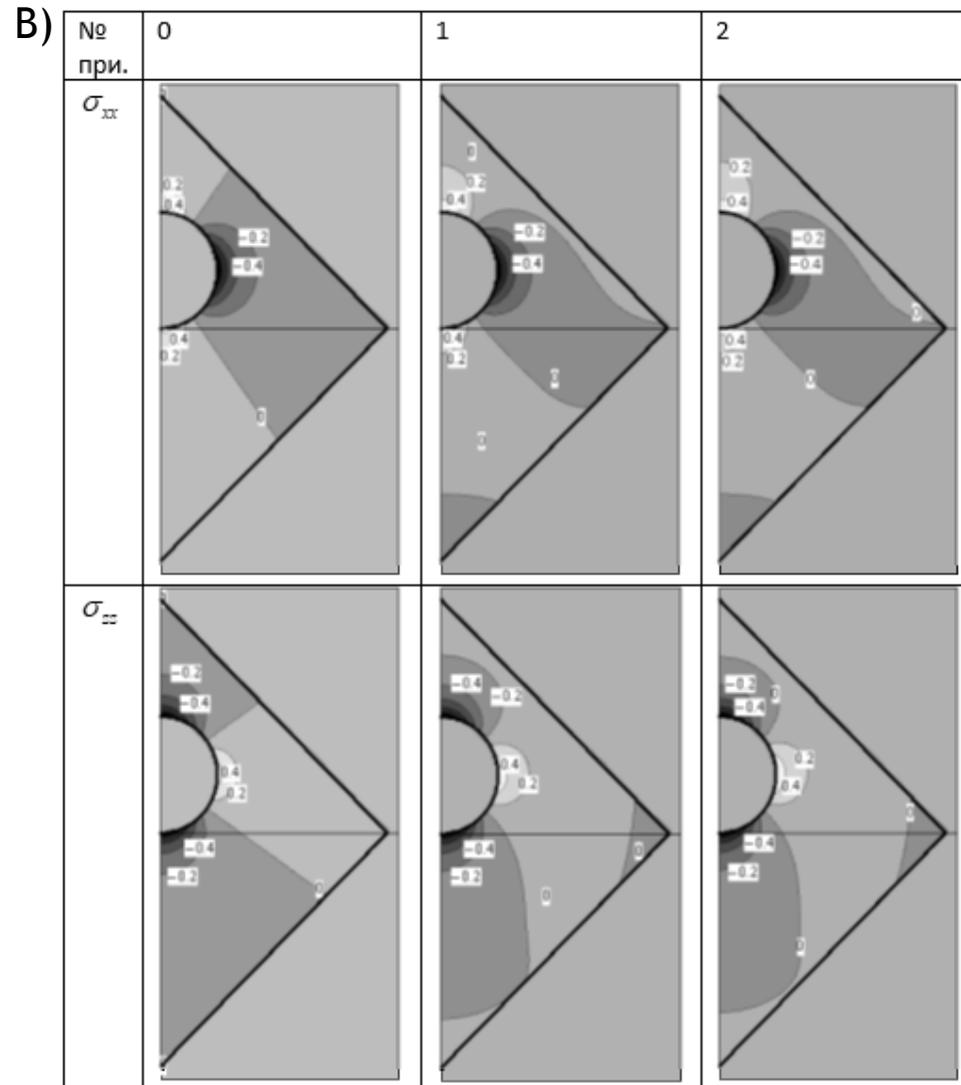


Рисунок 2 – Изолинии напряжений: А) центр полости в  $\{0,0,0\}$ ;  
Б) центр полости в  $\{0,0,1/8\}$ ; В) центр полости в  $\{0,0,1/4\}$

# Результаты решения

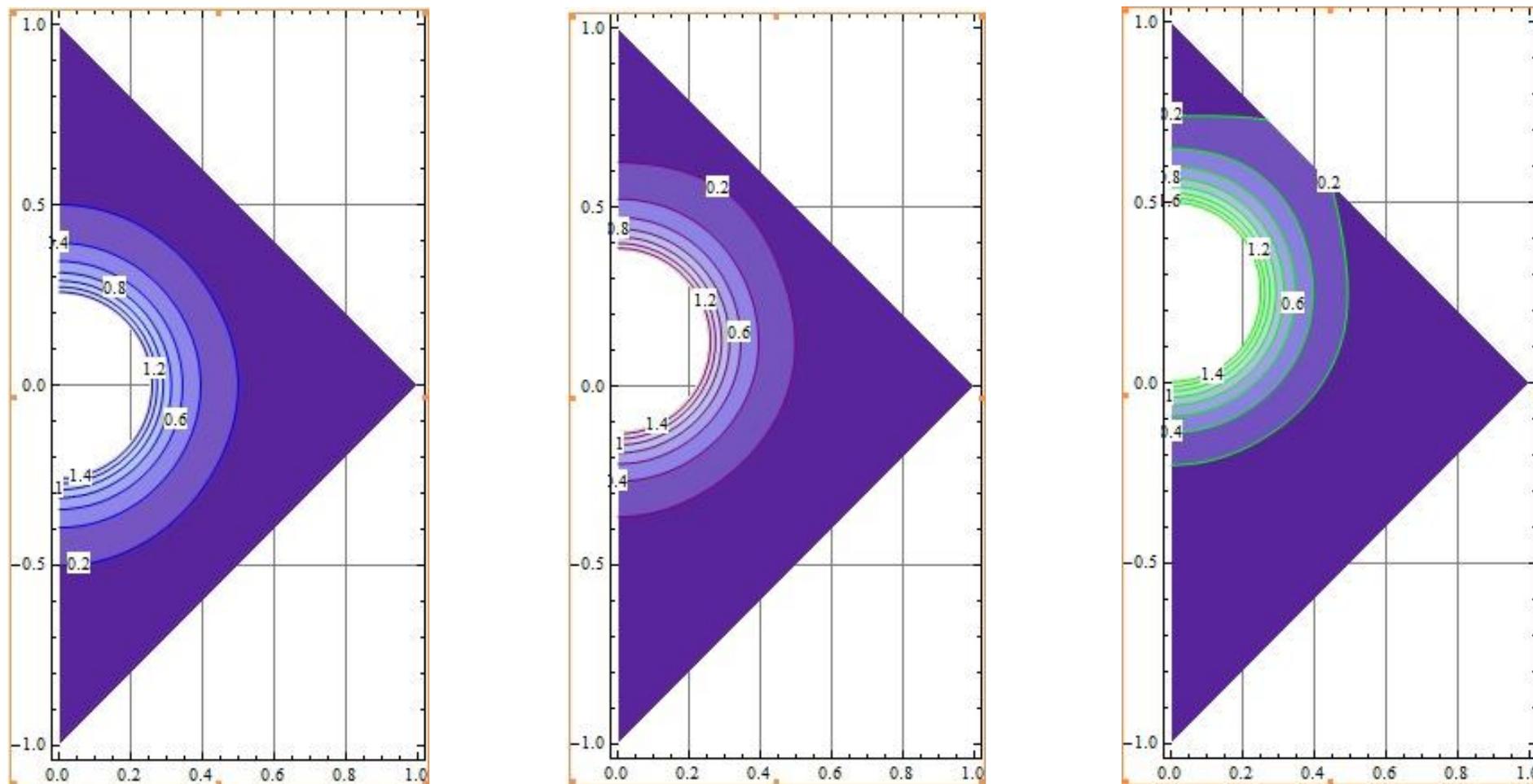


Рисунок 4 – Интенсивность напряжений на контуре полости  
 $h$  – положение полости вдоль оси  $z$

Заданный характер нагружения свидетельствует о том, что наибольшие значения  $\sigma_i$  достигаются на границе полости.

# Интенсивность напряжений на контуре полости

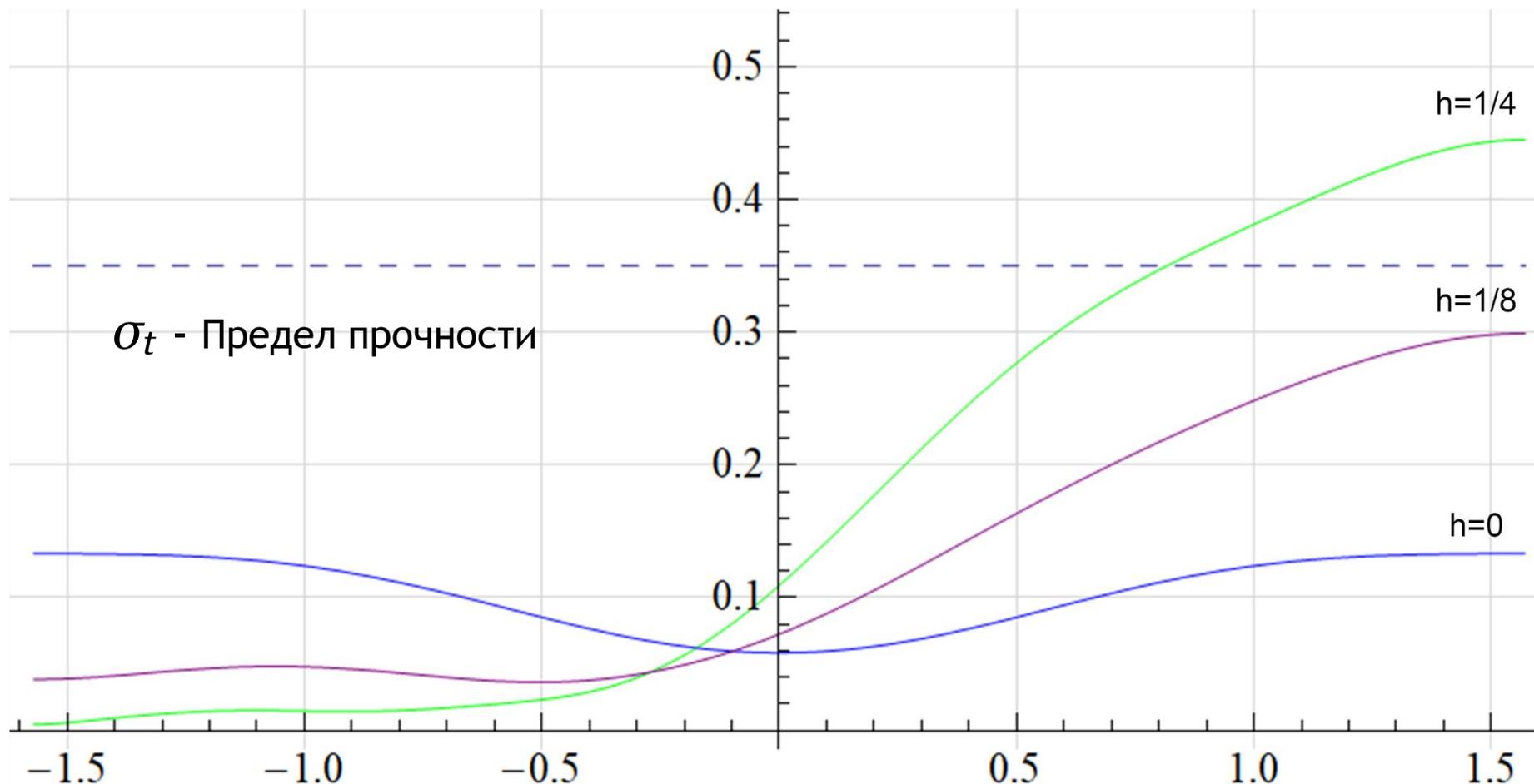


Рисунок 5 – Интенсивность напряжений на контуре полости  
 $h$  – положение центра полости вдоль оси  $z$

Горизонтальная пунктирная линия условно обозначает предельное значение  $\sigma_i$ , превышение которого недопустимо.

# Выводы

- использование «прямого» подхода требует существенных энергетических затрат: значительный рост величины мантиссы в представлении чисел при вычислениях и квадратично возрастающее время счета с ростом размерности удерживаемого отрезка базиса пространства внутренних состояний, в первую очередь, при проведении ортогонализации;
- подход Шварца существенно снижает временные затраты и, несмотря на итерационность и отсутствие доказательств сжимаемости отображений при итерациях, приводит к цели гораздо эффективнее;
- анализ зависимости НДС от параметров нагружения позволяет установить предельно-допустимые значения варьируемых параметров при обеспечении прочности;
- наличие сингулярностей формы тела (криволинейные ребра, конические тачки) требует разработки методов построения специальных решений для учета их влияния на НДС.

**Спасибо за внимание!**