

МОДЕЛЬ ФЕПЛЯ ФОН КАРМАНА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИИ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ

Гандилян Давид Ваганович¹ (david.ghandilyan@mail.ru), Устинов К.Б.¹

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им.
А.Ю. Ишлинского Российской академии наук

Аспирант, М.н.с. Лаборатории механики технологических процессов

2024



В области микро- и нанoeлектроники возникают задачи, связанные с производством и эксплуатацией сверхтонких элементов. Одной из подобных задач является определение параметров деформирования элементов конструкций, используемых в проекционной фотолитографии. Возникает необходимость в исследовании механических деформаций и напряжений в пластинах различной формы, в том числе, круговые пластины.

Отдельную трудность представляет корректное исследование деформирования тонких пластин, изгиб которых сильно зависит от напряжений в срединной поверхности, из-за чего уравнения, описывающие процесс деформирования, становятся нелинейными.

При исследовании деформирования пластин в качестве граничных условий обычно используют условие жесткой заделки, не учитывающие свойства основания. Одним из способов получения более точного решения является использование граничных условий типа обобщенной упругой заделки, т.е. пропорциональности компонент смещения и угла поворота в точке заделки действующим в этой точке продольной и поперечной силам и изгибающему моменту.

Целью работы является исследование влияния заделки на параметры деформирования пластины.

Постановка задачи

В качестве модели рассмотрим круговую пластину толщины h и радиуса R , соединенного с основанием. Воспользуемся цилиндрической системой координат (r, α, z) , компоненты смещения в срединной поверхности покрытия обозначим: $v(r, \alpha), u(r, \alpha), w(r, \alpha)$.

К пластине приложена поперечная нагрузка с постоянной интенсивностью $q = const$.

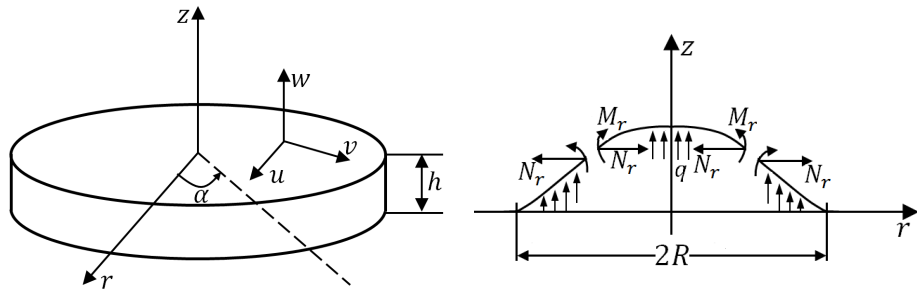


Рис. 1: Рассматриваемая система координат, конфигурация деформирования круговой пластины

Для исследования деформирования тонких пластин в качестве модели используем модель Фепля фон Кармана, позволяющая учитывать достаточно большие прогибы. Согласно данной модели для рассматриваемого случая осевой симметрии уравнения равновесия имеют вид:

$$D \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) = \frac{qr}{2} + N_r \frac{dw}{dr}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{\bar{E}h^3}{12},$$
$$\frac{d}{dr} (rN_r) - N_t = 0,$$
$$r \frac{d}{dr} (N_r + N_t) + \frac{hE}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0.$$

Выражения компонент усилий N_r , N_t и момента M_r через компоненты перемещения имеют вид

$$N_r = \bar{E}h \left(\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \nu \frac{u}{r} \right),$$
$$N_t = \bar{E}h \left(\frac{u}{r} + \nu \left(\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right) \right),$$
$$M_r = D \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right).$$

Для удобства дальнейшего анализа введем безразмерные величины:

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \text{при} \quad \begin{cases} r = 0 \Rightarrow \rho = 0, \\ r = R \Rightarrow \rho = 1. \end{cases}$$

$$\tilde{u}(\rho) = \frac{u(r)}{R}, \quad \tilde{w}(\rho) = \frac{w(r)}{R},$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{d\tilde{u}}{d\rho}, \quad \frac{dw}{dr} = \frac{d\tilde{w}}{d\rho}, \quad \frac{d^2w}{dr^2} = \frac{1}{R} \frac{d^2\tilde{w}}{d\rho^2}, \quad \frac{d^3w}{dr^3} = \frac{1}{R^2} \frac{d^3\tilde{w}}{d\rho^3},$$

$$\tilde{N}_r = \frac{N_r}{\bar{E}h}, \quad \tilde{N}_t = \frac{N_t}{\bar{E}h}, \quad p = \frac{q}{\bar{E}}.$$

$$D \left(\frac{1}{R^2} \frac{d^3\tilde{w}}{d\rho^3} + \frac{1}{R^2\rho} \frac{d^2\tilde{w}}{d\rho^2} - \frac{1}{R^2\rho^2} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right) = \frac{p\bar{E}R\rho}{2} + \tilde{N}_r\bar{E}h \frac{d\tilde{w}}{d\rho},$$

$$\rho \frac{d(\tilde{N}_r\bar{E}h)}{d\rho} + \tilde{N}_r\bar{E}h - \tilde{N}_t\bar{E}h = 0,$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} (\tilde{N}_r\bar{E}h + \tilde{N}_t\bar{E}h) + \frac{hE}{2} \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)^2 = 0.$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_r &= \frac{N_r}{\bar{E}h} = \frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)^2 + \nu \frac{\tilde{u}}{\rho}, \\
\tilde{N}_t &= \frac{N_t}{\bar{E}h} = \frac{\tilde{u}}{\rho} + \nu \left(\frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)^2 \right), \\
\tilde{M}_r &= \frac{M_r}{\bar{E}h^2} = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right) \left(\frac{d^2\tilde{w}}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Соответственно уравнения (1) в безразмерных величинах примут вид

$$\frac{d^3\tilde{w}}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2\tilde{w}}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} = \frac{12p\rho}{2} \left(\frac{R}{h} \right)^3 + 12\tilde{N}_r \left(\frac{R}{h} \right)^2 \frac{d\tilde{w}}{d\rho}, \tag{4}$$

$$\rho \frac{d\tilde{N}_r}{d\rho} + \tilde{N}_r - \tilde{N}_t = 0, \tag{5}$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} (\tilde{N}_r + \tilde{N}_t) + \frac{1}{2} (1 - \nu^2) \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)^2 = 0. \tag{6}$$

Для учета влияния основания будут использоваться граничные условия типа обобщенной упругой заделки, т.е. условия пропорциональности угла поворота и продольного и нормального смещения в точке заделки действующим в этой точке изгибающему моменту и продольным и поперечным усилиям

$$\bar{E} \begin{pmatrix} u(R) \\ -hw'(R) \\ w(R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_r \\ h^{-1}M_r \\ Q \end{pmatrix}, \quad \bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (7)$$

где a_{ij} ($a_{ij} = a_{ji}$) — матрица податливости, N_r — продольное усилие, M_r — изгибающий момент, Q — поперечное усилие, которое в силу симметрии и равномерности распределения приложенной нагрузки имеет вид:

$$Q = \frac{q \cdot r}{2}. \quad (8)$$

В случае жесткой заделки граничные условия примут вид ($a_{ij} = 0$):

$$\begin{aligned} u(R) &= 0, \\ w(R) &= 0, \\ w'(R) &= 0. \end{aligned}$$

- Граничные условия типа жесткой заделки:

$$\begin{aligned} u(R) &= 0, & \tilde{u}(\rho = 1) &= 0, \\ w(R) &= 0, & \tilde{w}(\rho = 1) &= 0, \\ \frac{dw(r)}{dr} \Big|_{r=R} &= 0, & \frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=1} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

- Граничные условия обобщенно упругой заделки:

$$\begin{aligned} u(R) &= -a_{11} \frac{N_r}{\bar{E}} + a_{12} \frac{M_r}{\bar{E}h} + a_{13} \frac{Q}{\bar{E}}, \\ w(R) &= -a_{31} \frac{N_r}{\bar{E}} + a_{32} \frac{M_r}{\bar{E}h} + a_{33} \frac{Q}{\bar{E}}, \Rightarrow \\ -\frac{dw(r)}{dr} \Big|_{r=R} &= -a_{21} \frac{N_r}{\bar{E}h} + a_{22} \frac{M_r}{\bar{E}h^2} + a_{23} \frac{Q}{\bar{E}h}. \\ \tilde{u}(\rho = 1) &= \left(\frac{h}{R} \right) (-a_{11} \tilde{N}_r + a_{12} \tilde{M}_r + a_{13} \tilde{Q}), \\ \Rightarrow \tilde{w}(\rho = 1) &= \left(\frac{h}{R} \right) (-a_{31} \tilde{N}_r + a_{32} \tilde{M}_r + a_{33} \tilde{Q}), \quad (10) \\ -\frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=1} &= -a_{21} \tilde{N}_r + a_{22} \tilde{M}_r + a_{23} \tilde{Q}. \end{aligned}$$

В силу допущения равномерности нагрузки, а также симметрии относительно оси z , можно считать, что усилие \tilde{N}_r является симметричной функцией, а $\frac{d\tilde{w}}{d\rho}$ — антисимметричной функцией от ρ . Следовательно, можно представить данные функции в виде следующих степенных рядов:

$$\begin{aligned}\tilde{N}_r &= \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{12\rho} (B_1\rho + B_3\rho^3 + B_5\rho^5 + B_7\rho^7 + \dots), \\ \frac{d\tilde{w}_r}{d\rho} &= -\left(\frac{h}{R}\right) \frac{1}{2\sqrt{3}} (C_1\rho + C_3\rho^3 + C_5\rho^5 + C_7\rho^7 + \dots),\end{aligned}\tag{11}$$

где C_i , B_i — постоянные коэффициенты, подлежащие определению. Из уравнения (5) получаем:

$$\tilde{N}_t = \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{12\rho} (B_1\rho + 3B_3\rho^3 + 5B_5\rho^5 + 7B_7\rho^7 + \dots),$$

Подставив (11) в (4) и (6) уравнения, получим систему уравнений, из которой решение будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 B_k &= -\frac{(1-\nu^2)}{2(k^2-1)} \sum_{i=1,3,5,7,\dots}^{k-2} C_i C_{k-i-1}, \quad k=3,5,7,\dots, \\
 C_3 &= \frac{1}{8} \left(B_1 C_1 - \frac{12}{2} p \left(\frac{R}{h} \right)^4 2\sqrt{3} \right), \\
 C_k &= \frac{1}{(k^2-1)} \sum_{i=1,3,5,7,\dots}^{k-2} C_i B_{k-i-1}, \quad k=5,7,9,\dots
 \end{aligned} \tag{12}$$

где все коэффициенты B_k, C_k , $k=3,5,7,\dots$ выражаются через пока еще неизвестные коэффициенты B_1, C_1 .

Используя уравнения в (3), а также учитывая полученное решение (12) выразим радиальную компоненту смещения

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(1-\nu^2)} (\tilde{N}_t - \nu \tilde{N}_r) &= \frac{\tilde{u}(\rho)}{\rho} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{\tilde{u}(\rho)}{\rho} &= \left(\frac{h}{R} \right)^2 \frac{1}{12(1-\nu^2)} \sum_{i=3,5,7,\dots} B_i (i-\nu) \rho^{i-1}. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Константы B_1, C_1, a , следовательно и смещения $\tilde{u}(\rho)$, $\frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho}$, находятся из решения системы первого и третьего граничных условий (10):

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\rho = 1) &= \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{12(1-\nu^2)} \sum_{i=3,5,7,\dots} B_i(i-\nu) = \left(\frac{h}{R}\right) \left[-a_{11} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{12} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} B_i - \right. \\ &\left. -a_{12} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\sum_{i=1,3,5,7,\dots} i \cdot C_i + \frac{\nu}{R} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} C_i \right) + a_{13} \frac{p}{2} \left(\frac{R}{h}\right) \right] \\ -\frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=1} &= \left(\frac{h}{R}\right) \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} C_i = -a_{21} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{12} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} B_i + \\ &+ a_{22} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\sum_{i=1,3,5,7,\dots} i \cdot C_i + \frac{\nu}{R} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} C_i \right) + a_{23} \frac{p}{2} \left(\frac{R}{h}\right), \end{aligned}$$

Нормальная компонента перемещений $\tilde{w}(\rho)$ (точнее появляющаяся после интегрирования $\frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho}$ неизвестная константа C_0) находится из второго граничного условия (10):

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\rho = 1) &= C_0 - \left(\frac{h}{R}\right) \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} C_i = \left(\frac{h}{R}\right) \left[-a_{31} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{12} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} B_i - \right. \\ &\left. -a_{32} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\sum_{i=1,3,5,7,\dots} i \cdot C_i + \frac{\nu}{R} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} C_i \right) + a_{33} \frac{p}{2} \left(\frac{R}{h}\right) \right] \end{aligned}$$

Модель Фепля фон Кармана в приближении постоянства продольных усилий

В отличие от основной модели Фепля фон Кармана, в данной модели предполагается постоянство продольных усилий, что приводит к упрощению уравнений (1):

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \tilde{w}}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 \tilde{w}}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} &= \frac{12p\rho}{2} \left(\frac{R}{h}\right)^3 + 12\tilde{N}_r \left(\frac{R}{h}\right)^2 \frac{d\tilde{w}}{d\rho}, \\ \rho \frac{d\tilde{N}_r}{d\rho} + \tilde{N}_r - \tilde{N}_t &= 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{N}_r = \tilde{N}_t = \tilde{N} = const. \end{aligned}$$

Аналитическое общее решение для компонент смещений $\tilde{w}(\rho)$, $\tilde{u}(\rho)$ в безразмерных величинах имеет вид

$$\tilde{w}(\rho) = \frac{p}{4\tilde{N}_r} \frac{R}{h} (1 - \rho^2) + C \left[I_0 \left(\rho \frac{R}{h} \sqrt{12\tilde{N}_r} \right) - I_0 \left(\frac{R}{h} \sqrt{12\tilde{N}_r} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\rho) &= \frac{\tilde{N}_r}{(1+\nu)} - \frac{\rho^3}{48\tilde{N}_r^2} \frac{R}{h} \cdot \left(p^2 - 24p \frac{R}{h} C \tilde{N}_r^2 F_2 \left(\frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}; 3 \left(\frac{R}{h}\right)^2 \rho^2 \tilde{N}_r \right) + \right. \\ &\quad \left. + 144 \left(\frac{R}{h}\right)^2 C^2 \tilde{N}_r^4 F_3 \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}, 3; 12 \left(\frac{R}{h}\right)^2 \rho^2 \tilde{N}_r \right) \right). \end{aligned}$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя (функция Инфельда) нулевого порядка, C — постоянная интегрирования, ${}_nF_m$ — гипергеометрическая функция. Постоянная C и величина усилий \tilde{N}_r находятся из граничных условий (10).

В расчетах отношение толщины пластины к радиусу принималось: $h/R = 1/100$. Значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона для пластины принимались соответствующие свойствам алюминия $E = 70$ ГПа, $\nu = 0.35$. В качестве коэффициентов упругой заделки принимались значения, соответствующие пластине алюминия указанной геометрии, сопряженной с кремниевым основанием:

$$a_{11} = 10, \quad a_{12} = a_{21} = 1.7, \quad a_{22} = 12, \quad a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{33} = 0.$$

Для значений безразмерной величины интенсивности поперечной нагрузки: $p = q/\bar{E} = 10^{-8}\sqrt{3}, \dots, 10^{-5}\sqrt{3}$ были вычислены значения безразмерных величин прогиба в центре пластины $\tilde{w}(\rho = 0)$ (табл. 1), момента на краю пластины \tilde{M}_r и величины растягивающего усилия \tilde{N}_r (табл. 2, 3) при граничных условиях типа обобщенной упругой заделки, а также жесткой заделки ($a_{ij} = 0$).

Для представления результатов также введем следующее обозначение:

$$\delta = \frac{X - X^0}{X}$$

где δ — относительная разность решений X, X^0 с учетом и без учета податливости основания.

Величины прогиба в центре пластины $\tilde{w}(\rho = 0)$ при учете и без учета податливости для используемых моделей

$p = \frac{q}{E}$	a_{ij}	\tilde{w}_{Series}	\tilde{w}_{Karman}	δ_{Series}	δ_{Karman}
$p_0 = 10^{-8} \cdot \sqrt{3}$	$a_{ij} = 0$	3.085e-3	3.141e-3	3.39 %	3.49 %
	$a_{ij} \neq 0$	3.193e-3	3.255e-3		
$2p_0$	$a_{ij} = 0$	5.544e-3	5.819e-3	3.2 %	3.47 %
	$a_{ij} \neq 0$	5.728e-3	6.028e-3		
$20p_0$	$a_{ij} = 0$	1.960e-2	2.292e-2	3.24 %	4.04 %
	$a_{ij} \neq 0$	2.026e-2	2.388e-2		
$200p_0$	$a_{ij} = 0$	4.558e-2	5.508e-2	3.41 %	4.21 %
	$a_{ij} \neq 0$	4.719e-2	5.750e-2		

Таблица 2

Величины продольного усилия на краю пластины \tilde{N}_r при учете и без учета податливости для используемых моделей

$p = \frac{q}{E}$	a_{ij}	\tilde{N}_r^{Series}	\tilde{N}_r^{Karman}	δ_{Series}	δ_{Karman}
$p_0 = 10^{-8} \cdot \sqrt{3}$	$a_{ij} = 0$	4.309e-6	4.060e-6	4.06 %	4.02 %
	$a_{ij} \neq 0$	4.491e-6	4.230e-6		
$2p_0$	$a_{ij} = 0$	1.41e-5	1.390e-5	-0.21 %	-0.22 %
	$a_{ij} \neq 0$	1.407e-5	1.387e-5		
$20p_0$	$a_{ij} = 0$	2.049e-4	2.187e-4	-3.43 %	-2.97 %
	$a_{ij} \neq 0$	1.981e-4	2.124e-4		
$200p_0$	$a_{ij} = 0$	1.304e-3	1.311e-3	-3.33 %	-2.98 %
	$a_{ij} \neq 0$	1.262e-3	1.273e-3		

Величины изгибающего момента на краю пластины \tilde{M}_r при учете и без учета податливости для используемых моделей

$p = \frac{q}{E}$	a_{ij}	\tilde{M}_r^{Series}	\tilde{M}_r^{Karman}	δ_{Series}	δ_{Karman}
$p_0 = 10^{-8} \cdot \sqrt{3}$	$a_{ij} = 0$	2.11e-5	2.12e-5	-1.78 %	-1.44 %
	$a_{ij} \neq 0$	2.073e-5	2.09e-5		
$2p_0$	$a_{ij} = 0$	3.98e-5	4.06e-5	-1.79 %	-1.75 %
	$a_{ij} \neq 0$	3.910e-5	3.992e-5		
$20p_0$	$a_{ij} = 0$	2.378e-4	2.453e-4	-3.75 %	-3.37 %
	$a_{ij} \neq 0$	2.292e-4	2.373e-4		
$200p_0$	$a_{ij} = 0$	1.187e-3	1.219e-3	-9.13 %	-8.87 %
	$a_{ij} \neq 0$	1.087e-3	1.120e-3		

Из данных, представленных в таблицах следует, что для достаточно малых значений интенсивности поперечной нагрузки $p = q/\bar{E}$ модель Фепля фон Кармана при $\tilde{N}_r = const$ и модель Фепля фон Кармана в рядах хорошо согласуются. Однако стоит подчеркнуть, что при увеличении p решение в рамках модели Фепля фон Кармана при $\tilde{N}_r = const$ и полученное в рядах для $\tilde{N}_r \neq const$ отличаются, причем при $p = 10^{-5} \cdot \sqrt{3}$ разница значения прогиба в центре ($\tilde{w}(\rho = 0)$) уже достигает порядка 20%, из чего можно сделать вывод, что уже в данном случае влияния непостоянства продольных сил \tilde{N}_r существенен. Недостатком решения задачи с помощью модели Фепля фон Кармана в рядах является увеличение необходимого числа членов ряда, а следовательно, увеличение времени расчета и накапливание ошибок с ростом $p = q/\bar{E}$. Это становится существенным при числе слагаемых $n > 50$, особенно для случая обобщенной упругой заделки.

Приведенные расчеты свидетельствуют о том, что учет влияния коэффициентов податливости приводит к увеличению значений нормальной компоненты смещения, и уменьшению изгибающего момента и продольных усилий на краю пластины вне зависимости от используемой модели. Для прогибов $> 5\%$ от радиуса пластины можно заметить, что значения изгибающего момента на краю пластины с учетом и без учета податливости основания отличаются более чем в 10%.

Спасибо за внимание!