Применение метода декомпозиции при построении управлений для многозвенных манипуляторов

Чупин Илья Алексеевич
mr.tchupin@yandex.ru

Уральский Федеральный университет, Екатеринбург
XIII Всероссийская конференция "Актуальные проблемы прикладной математики и механики", посвященная памяти академика А. Ф. Сидорова

2-8 сентября 2024

Актуальность темы исследования

Динамика простых робототехнических систем описывается сложными нелинейными дифференциальными уравнениями. Многие задачи теории оптимального управления для простых двухзвенных манипуляторов были решены аналитически лишь в упрощенном линейном варианте, но это ограничивает применение решения практически.

Необходимы новые подходы к построениям управлений манипуляторов, позволяющие автоматизировать процесс управления манипулятором.

В данной работе предлагается подход к автоматизации процедуры построения управлений для манипуляторов. В работе Dolgii Yu.F., Sesekin A.N., Chupin I.A. "Using graphs in modeling the movements of a manipulation robot"было получено полное решение задачи моделирования движений манипулятора для пространственных движений механической системы с цилиндрическими шарнирами, и предложена методика, позволяющая использовать при составлении уравнений Лагранжа 2 рода с большим числом степеней свободы пакеты аналитических вычислений.

В настоящей работе при построении управлений применяется метод декомпозиции. Используя процедуры разделения движения, сложное движение манипулятора раскладывается на простые движения.

Моделирование движений манипуляционного робота

Рассматривается механическая система, состоящая из n абсолютных твердых тел, соединенных между собой цилиндрическими шарнирами, а также с внешним телом, совершающим заданное движение. Телам механической системы ставим в соответствие вершины графа s_i, $i = 0, 1, ..., n$, а ее шарнирам - дуги графа u_a, $a = 1, ..., n$. Внешнему телу отвечает вершина графа s_0. Рассматриваются механические системы, для которых соответствующие графы имеют структуру дерева.

В работе Dolgii Yu.F., Sesekin A.N., Chupin I.A. "Using graphs in modeling the movements of a manipulation robot использую графы для описания связей между телами механической системы, были определены скорости звеньев манипуляционного робота, кинетическая энергия и получены уравнения Лагранжа 2 рода.

Используем правильную нумерацию вершин и дуг графа. Наибольшие индексы имеют вершины наиболее удаленные от вершины s_0 графа. Выбираем направления дуг к вершине s_0. При описании взаимосвязей между телами используем логистические функции i^+, i^-. Значение функции $i^+(a)$ равно индексу вершины, из которой дуга u_a выходит, а значение функции $i^-(a)$ равно индексу вершины, в которую дуга u_a входит. В графе с правильной нумерацией индексы дуг u_a монотонно возрастают вдоль пути от вершины s_0 к вершине S_i, $1 \leq i \leq n$. Нумерация может быть выбрана таким образом, что имеют место равенства $i^+(a) = a$ и неравенства $i^-(a) < a$. Для простой разомкнутой кинематической цепи $i^-(a) = a - 1$, $a = \overline{1, n}$. Дуга u_a соответствует цилиндрическому шарниру, который соединяет тела соответствующие вершинам графа с индексами $i^+(a)$ и $i^-(a)$.

При описании взаимосвязей между телами используется матрица инцидентности $S = \{S_{i\,a}\}_{i=\overline{1,n}}^{a=\overline{1,n}}$, элементы которой определяюстя формулами

$$S_{i\,a} = \begin{cases} +1 & \text{при } i = i^+(a), \\ -1 & \text{при } i = i^-(a), \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Для рассматриваемого графа матрица является верхней треугольной и все ее элементы на главной диагонали равны $+1$. Элементы обратной матрицы $S^{-1} = \{S^{-1}_{i\,a}\}_{i=\overline{1,n}}^{a=\overline{1,n}}$ определяются формулами:

$$S^{-1}_{i\,a} = \begin{cases} +1, & \text{если дуга } u_a \text{ принадлежит пути между вершинами } s_0 \text{ и } s_i, \\ 0, & \text{если дуга } u_a \text{ не принадлежит пути между вершинами } s_0 \text{ и } s_i. \end{cases}$$

Движения манипуляционного робота определяются относительными поворотами вокруг осей цилиндрических шарниров. В работе направления цилиндрических шарниров определяются единичными векторами e_a, $a = \overline{1, n}$, направления которых могут быть произвольными в инерциальном пространстве. Во время движения положение вектора e_a не меняется в подвижных системах координат жестко связанных со смежными телами соединяемыми шарниром u_a. Точка O_a, определяющая начало этих систем координат выбирается на оси шарнира. Для смежных тел индекс вершины графа s_i равняется $i = i^-(a)$ или $i^+(a)$. Для подвижных систем координат $O_a x_{1\,i} x_{2\,i} x_{3\,i}$ направление оси $O_a x_{3\,i}$ совпадает с вектором e_n. Для смежных тел относительный поворот тела с индексом вершины графа $i^+(a)$ относительно тела с индексом вершины графа $i^-(a)$ определяется углом φ_a, а относительная угловая скорость вектором $\omega_a = \dot{\varphi}_a \mathrm{e}_a$. Матрица относительного поворота имеет вид:

$$A_a = \begin{pmatrix} \cos\varphi_a & \sin\varphi_a & 0 \\ -\sin\varphi_a & \cos\varphi_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(\varphi_a), a = \overline{1, n}$$

В работе также находится матрица направляющих косинусов $A_{a\,b}$, связывающая подвижные системы координат, жестко связанные с телами с индексами вершин графа $i^{-}(a)$ и $i^{+}(b)$ соответственно, для вершины графа s_i, для которой существуют дуги u_a, u_b и выполняются равенства $i = i^{-}(a) = i^{+}(b)$. Матрица зависит от выбора направления осей координат $O_b x_{1\,b}$, $O_b x_{2\,b}$, и не зависит от движения системы.

Вид матрица приведен в работе Dolgii Yu.F., Sesekin A.N., Chupin I.A. "Using graphs in modeling the movements of a manipulation robot".

Абсолютная угловая скорость тела

Пусть I_a - множество упорядоченных по возрастанию индексов дуг соединяющих вершину графа s_0 с вершиной s_i, $i = i^+(a)$, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)^T$.

Абсолютная угловая скорость тела с индексом вершины графа $i = i^+(a), 1 \leq a \leq n$, в подвижной системе координат жестко связанной с этим телом определяется формулой

$$\mathbf{\Omega}_i = \sum_{b \in I_a} B_{a\,b}(\varphi) \mathrm{e}_b \dot{\varphi}_b,$$

где $B_{a\,a}(\varphi) = I_3$, $B_{a\,b}(\varphi) = A_{a^-}(\varphi_{a^-}) \cdots A_b(\varphi_b)$, $A_b(\varphi_b) = A_{b\,b^+} A(\varphi_b)$; b^+ - ближайший к b индекс $b^+ > b$, $b \in I_a$, $b \neq a$; a^- - ближайший к a индекс $a^- < a$.

Для простой разомкнутой кинематической цепи $I_a = \{1, ..., a\}$, $B_{a\,b}(\varphi) = A_{a-1}(\varphi_{a-1}) \cdots A_b(\varphi_b)$, $A_b(\varphi_b) = A_{b\,(b+1)} A(\varphi_b)$, $1 \leq b \leq a-1$.

Абсолютная линейная скорость точки O_a

Скорость точки O_1 оси шарнира соединяющего механическую систему с внешним телом задается в инерциальной системе координат векторнозначной функцией времени $\mathrm{V}_1(t)$.

Абсолютная линейная скорость точки O_a определяется формулой

$$\mathrm{V}_a = B_{a\,1}(\varphi)\mathrm{V}_1(t) - \sum_{c \in I_{a-}} \mathrm{C}_{a\,c}(\varphi)\dot{\varphi}_c,$$

где $\mathrm{C}_{a\,c}(\varphi) = \sum_{b \in I_{a-} \setminus I_{c-}} B_{a\,b}(\varphi) B_{b\,c}(\varphi)[\mathrm{e}_c, \mathrm{d}_{b\,b^+}]$, $a \geq 2$, $\mathrm{d}_{b\,b^+} = \overrightarrow{O_b O_{b^+}}$ - постоянный вектор в системе координат $O_b x_{1\,b} x_{2\,b} x_{3\,b}$.

Основной результат

Кинетическая энергия определяется формулой

$$T = \frac{1}{2}(\sum_{a=1}^{n} m_a(B_{a\,1}^T(\varphi)B_{a\,1}(\varphi)\mathrm{V}_1(t), \mathrm{V}_1(t)) -$$

$$- 2\sum_{b=1}^{n}\sum_{a=1}^{n} m_a(S_{b\,a^-}^{-1}(B_{a\,1}(\varphi)\mathrm{V}_1(t), \mathrm{C}_{a\,b}(\varphi))+$$

$$+ \sum_{b,c=1}^{n}[\sum_{a=2}^{n} m_a S_{c\,a^-}^{-1}(S_{b\,a^-}^{-1}(\mathrm{C}_{a\,b}(\varphi), \mathrm{C}_{a\,c}(\varphi)) + 2S_{b\,a}^{-1}([\mathrm{C}_{a\,c}(\varphi), B_{a\,c}(\varphi)\mathrm{e}_b], \mathrm{d}_{b\,b}))+$$

$$+ \sum_{a=1}^{b} S_{b\,a}^{-1}S_{c\,a}^{-1}(J_a B_{a\,c}(\varphi)\mathrm{e}_b, B_{a\,c}(\varphi)\mathrm{e}_c)]\dot{\varphi}_b\dot{\varphi}_c)$$

где φ - вектор углов поворотов звеньев, m_i - масса, J_i - тензор инерции в точке O_a, $i = i^+(a)$, $1 \le a \le n$. В системе координат $O_a x_{1\,i} x_{2\,i} x_{3\,i}$ жестко связанной с телом тензор J_i постоянен.

Получена явная аналитическая зависимость кинетической энергии механической системы от обобщенных координат. По каждой координате зависимость периодическая с периодом 2π и коэффициенты представления кинетической энергии определяются, приведенными в работе формулами через матрицы $A(\varphi_b)$, $b = \overline{1, n}$. Поэтому в уравнениях Лагранжа производные коэффициентов представления кинетической энергии по обобщенным координатам могут быть вычислены аналитически.

Силы тяжести $Q_a(\varphi)$, $a = \overline{1, n}$ зависят от углов поворота звеньев.

Управляющие воздействия моделируются моментами сил $M_a(t)\mathrm{e}_a$, $a = \overline{1, n}$, приложенных в цилиндрических шарнирах. Поэтому обобщенными силами являются величины этих моментов $M_a(t)$, $a = \overline{1, n}$.

Уравнение Лагранжа 2 рода

$$\sum_{c=1}^{n} a_{b\,c}(\varphi)\ddot{\varphi}_c + \sum_{c,d=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{b\,c}(\varphi)}{\partial \varphi_d} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{d\,c}(\varphi)}{\partial \varphi_b}\right)\dot{\varphi}_c\dot{\varphi}_d +$$
$$+\sum_{c=1}^{n}\left(\frac{\partial a_c(t,\varphi)}{\partial \varphi_b} - \frac{\partial a_b(t,\varphi)}{\partial \varphi_c}\right)\dot{\varphi}_c - \frac{1}{2}\frac{\partial a_0(t,\varphi)}{\partial \varphi_b} -$$
$$-\frac{\partial a_b(t,\varphi)}{\partial t} = Q_b(\varphi) + M_b(t),\ b = \overline{1,n}$$

где коэффиценты a_0, a_b, $b, c = \overline{1,n}$ определяются формулами

$$a_0(t,\varphi) = \sum_{a=1}^{n} m_a(B^T_{a\,1}(\varphi)B_{a\,1}(\varphi)\mathrm{V}_1(t), \mathrm{V}_1(t)),$$

$$a_b(t,\varphi) = \sum_{a=1}^{n} m_a\left(S^{-1}_{b\,a}\left([B_{a\,1}(\varphi)\mathrm{V}_1(t), B_{a\,b}\mathrm{e}_b], \mathrm{d}_{b\,b}\right) + S^{-1}_{b\,a-}\left(B_{a\,1}(\varphi)\mathrm{V}_1(t), \mathrm{C}_{a\,b}(\varphi)\right)\right),$$

Коэффицент $a_{b\,c}$, $b, c = \overline{1, n}$ определяется формулой

$$a_{b\,c}(\varphi) = \sum_{a=2}^{n} m_a S^{-1}_{c\,a^-} (S^{-1}_{b\,a^-} (\mathrm{C}_{a\,b}(\varphi), \mathrm{C}_{a\,c}(\varphi)) +$$

$$+ 2S^{-1}_{b\,a}([\mathrm{C}_{a\,c}(\varphi), B_{a\,b}(\varphi)\mathrm{e}_b], \mathrm{d}_{b\,b})) +$$

$$+ \sum_{a=1}^{n} S^{-1}_{b\,a} S^{-1}_{c\,a} (J_a B_{a\,b}(\varphi)\mathrm{e}_b, B_{a\,c}(\varphi)\mathrm{e}_c)\,.$$

Постановка задачи управления

Постановка задачи управления заключается в нахождении управлений $M_b(t)$, $b = \overline{1, n}$, которые позволяют перевести манипулятор из заданного начального положения равновесия

$$\varphi_b(0) = \varphi_b^0, \quad \dot{\varphi}_b(0) = 0, \quad b = \overline{1, n},$$

в заданное конечное положение равновесия

$$\varphi_b(T_k) = \varphi_b^k, \quad \dot{\varphi}_b(T_k) = 0, \quad b = \overline{1, n},$$

за наименьшее время движения T_k.

Большинство манипуляторов являются стационарными и жестко связаны с неподвижным внешним телом, поэтому рассмотрим случай, когда внешнее тело неподвижно, и скорость точки O_1 оси шарнира $V_1(t) = 0$. В этом случае коэффициенты уравнения Лагранжа 2 рода

$$a_0(t, \varphi) = 0, \quad a_b(t, \varphi) = 0.$$

Уравнение Лагранжа 2 рода будет иметь вид

$$\sum_{c=1}^{n} a_{b\,c}(\varphi)\ddot{\varphi}_c + \sum_{c,d=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{b\,c}(\varphi)}{\partial \varphi_d} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{d\,c}(\varphi)}{\partial \varphi_b} \right) \dot{\varphi}_c \dot{\varphi}_d = Q_b(\varphi) + M_b(t), b = \overline{1, n}.$$

Метод декомпозиции

Метод декомпозиции заключается в процедуре замораживания связей, позволяющей сложный поворот манипулятора разложить на простые повороты. Время полного поворота определяется суммой времен всех поворотов. Для реализации поворота будем использовать релейные управления с одной точкой переключения.

Рассмотрим порядок поворотов звеньев по возрастанию. Поворот i -го звена происходит за время T_{φ_i}. Общее время движения определяется суммой времен всех поворотов

$$T_k = \sum_{i=1}^{n} T_{\varphi_i}.$$

Для минимизации времени полного поворота может быть решена задача оптимального выбора порядка поворотов звеньев.

При i-ом повороте фиксируются все углы, кроме φ_i. Далее будем обозначать $\widetilde{\varphi}$ вектор углов поворотов звеньев с учетом замораживания связей.

Коэффициенты уравнения Лагранжа обозначим следующим образом

$$a_{b\,i}(\widetilde{\varphi}) = \widetilde{a_{b\,i}}(\varphi_i), \quad \frac{\partial a_{b\,i}(\varphi)}{\partial \varphi_i}\Big|_{\varphi=\widetilde{\varphi}} = q_{b\,i}(\varphi_i).$$

Программные управления

При повороте $i-$го звена управляющие моменты $M_b(t)$ на отрезке $t \in [0, T_{\varphi_i}]$ определяются следующими формулами

при $b = i$

$$M_b(t) = \begin{cases} M_b^0, & 0 < t \le t_{\varphi_i}, \\ -M_b^0, & t_{\varphi_i} < t \le T_{\varphi_i}, \end{cases} \quad i = \overline{i, n},$$

при $b \neq i$

$$M_b(t) = \widetilde{a_{b\,i}}(\varphi_i)\ddot{\varphi}_i + \left(\frac{\partial a_{b\,i}(\varphi)}{\partial \varphi_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{i\,i}(\varphi)}{\partial \varphi_b} \right) \Bigg|_{\varphi = \widetilde{\varphi}} \dot{\varphi}_i^2 - Q_b(\widetilde{\varphi})$$

При повороте $i-$ого звена, $i \neq b$, $M_b(t)$ определяется специальным образом, позволяющим реализовать замораживание других звеньев

$$\ddot{\varphi}_i = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad i \neq b.$$

Первый поворот

При первом повороте $\varphi_h = \varphi_h^0$, $h = \overline{2, n}$, и угол φ_1 меняется от φ_1^0 до φ_1^k. В конечном положении скорость нулевая. Этот поворот описывается дифференциальным уравнением Лагранжа 2 рода

$$\widetilde{a_{1\,1}}(\varphi_1)\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}q_{1\,1}(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2 = Q_1(\widetilde{\varphi}) + M_1(t).$$

Остальные уравнения системы дифференциальных уравнений движения выполняются засчет специального выбора $M_b(t), b \neq i$.

Для данного уравнения находится численно момент переключения управления t_{φ_1} и общее время поворота T_{φ_1}.

i-ый поворот, $i \neq n$

При i-ом повороте $\varphi_h = \varphi_h^0$, $h = \overline{i+1, n}$, $\varphi_g = \varphi_g^k$, $g = \overline{1, i-1}$, и угол φ_i меняется от φ_i^0 до φ_i^k. В конечном положении скорость нулевая. Этот поворот описывается системой дифференциальных уравнений Лагранжа 2 рода

$$\widetilde{a_{i\,i}}(\varphi_i)\ddot{\varphi}_i + \frac{1}{2} q_{i\,i}(\varphi_i)\dot{\varphi}_i^2 = Q_i(\widetilde{\varphi}) + M_i(t).$$

Для данного уравнения находится численно момент переключения управления t_{φ_i} и общее время поворота T_{φ_i}.

Предложенный метод нахождения управлений совместно с применением графов для моделирования движений манипуляционного робота и вывода уравнений движения позволяет использовать пакеты аналитических вычислений для автоматизации нахождения управлений для многозвенных манипуляторов.

Список литературы

1. *Dolgii Yu.F., Sesekin A.N., Chupin I.A.* Using graphs in modeling the movements of a manipulation robot // Proceedings of the X All-Russian Conference "Actual Problems of Applied Mathematics and Mechanics"with International Participation, Dedicated to the Memory of Academician A.F. Sidorov and 100th Anniversary of UrFU: AFSID-2020.
2. *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989.

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ!