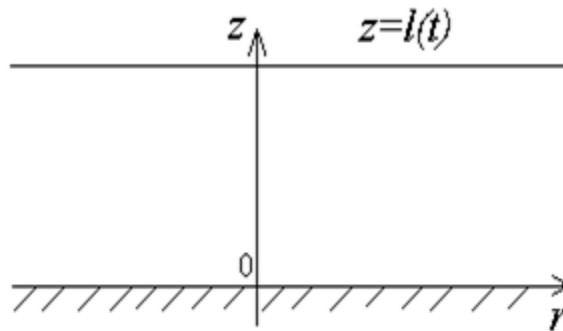


Вращательно-симметричное движение бинарной смеси с плоской свободной границей при малых числах Марангони

Собачкина Наталья Леонидовна
Сибирский федеральный университет, Красноярск

X Всероссийская конференция
«Актуальные проблемы прикладной математики и
механики» с международным участием, посвященная
памяти академика А.Ф.Сидорова и 100-летию
Уральского федерального университета
1-6 сентября 2020 г.

Постановка задачи



$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

(1)

$$\frac{d\theta}{dt} = \chi \Delta \theta, \quad \frac{dc}{dt} = d\Delta c + \alpha d\Delta \theta,$$

$$\begin{aligned} u &= ru_1(z, t), & w &= w(z, t), & p &= p(r, z, t), \\ \theta &= a(z, t)r^2 + b(z, t), & c &= h(z, t)r^2 + g(z, t). \end{aligned}$$

(1')

Подстановка решения в систему уравнений термодиффузии приводит к системе (переобозначим $u_1 \leftrightarrow u$):

$$ru_t + ru^2 + rwu_z + \frac{1}{\rho} p_r = r\nu u_{zz}; \quad (2)$$

$$w_t + ww_z + \frac{1}{\rho} p_z = \nu w_{zz}; \quad (3)$$

$$2u + w_z = 0; \quad (4)$$

$$a_t + 2au + wa_z = \chi a_{zz}; \quad (5)$$

$$b_t + wb_z = \chi(4a + b_{zz}); \quad (6)$$

$$h_t + 2hu + wh_z = dh_{zz} + \alpha da_{zz}; \quad (7)$$

$$g_t + wg_z = d(4h + g_{zz}) + \alpha d(4a + b_{zz}), \quad (8)$$

которую требуется решить при $t > 0$, $0 < z < l(t)$, где $z = l(t)$ – свободная граница.

Краевые условия на неизвестной свободной границе $z = l(t)$ для системы (2)–(8) имеют вид:

$$\frac{dl}{dt} = w(l(t), t); \quad (9)$$

$$u_z = -\frac{2\alpha_1}{\rho\nu}a - \frac{2\alpha_2}{\rho\nu}h; \quad (10)$$

$$p_{gas} - p + 2\rho\nu w_z = 0; \quad (11)$$

$$ka_z + \gamma(a - a_{gas}) = 0; \quad (12)$$

$$kb_z + \gamma(b - b_{gas}) = 0; \quad (13)$$

$$h_z + \alpha a_z = 0; \quad (14)$$

$$g_z + \alpha b_z = 0, \quad (15)$$

Граничные условия на твердой стенке $z = 0$:

$$u(0, t) = 0, \quad w(0, t) = 0, \quad a(0, t) = a(t), \quad b(0, t) = b(t), \quad (16)$$

$$h_z(0, t) + \alpha a_z(0, t) = 0, \quad g_z(0, t) + \alpha b_z(0, t) = 0.$$

Начальные условия:

$$u(z, 0) = u_0(z), \quad w(z, 0) = w_0(z), \quad a(z, 0) = a_0(z), \quad (17)$$

$$b(z, 0) = b_0(z), \quad h(z, 0) = h_0(z), \quad g(z, 0) = g_0(z), \quad l(0) = l_0.$$

Градиент давления вдоль оси r

Из уравнений (2), (3) выразим градиент давления (p_r, p_z) :

$$p_r = -r\rho(u_t + u^2 + wu_z - \nu u_{zz}); \quad (18)$$

$$p_z = \rho(w_{zz} - w_t - ww_z); \quad (19)$$

Условия совместности уравнений (18), (19) удовлетворяются тождественно: $p_{rz} = p_{zr} = 0$.

Откуда следует, что функция $u(z, t)$ будет определяться из уравнения

$$u_t + u^2 + wu_z = \nu u_{zz} + f(t), \quad (20)$$

а давление восстанавливается по формуле

$$p = -\frac{r^2}{2}\rho f(t) + s(z, t). \quad (21)$$

Преобразование к задаче в фиксированной области

В полученной системе введем безразмерные переменные и функции

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\nu t}{l_0^2}, & y &= \frac{z}{l(t)}, & U &= \frac{l_0^2 u}{\nu}, & A &= \frac{l_0^2}{T}, \\ A_{gas} &= \frac{l_0^2 a_{gas}}{\bar{T}}, & H(z, t) &= \frac{l_0^2 h}{\bar{c}}, & L(\tau) &= \frac{l(t)}{l_0}, & F(\tau) &= \frac{l_0^4 f(t)}{\nu^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

В результате получим задачу в фиксированной области $0 < y < 1$:

$$L(U) \equiv U_\tau - (\ln L)_\tau y U_y - 2U_y \int_0^y U(y, \tau) dy + U^2 - \frac{1}{L^2} U_{yy} - F(\tau) = 0; \quad (23)$$

$$F(U, A) \equiv A_\tau - (\ln L)_\tau y A_y - 2A_y \int_0^y U(y, \tau) dy + 2AU - \frac{1}{\text{Pr} L^2} A_{yy} = 0; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} F(U, A, H) \equiv & H_\tau - (\ln L)_\tau y H_y - 2H_y \int_0^y U(y, \tau) dy + 2HU - \\ & - \frac{1}{\text{Sc} L^2} H_{yy} - \frac{\text{Sr}}{\text{Sc} L^2} A_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Интегральное условие переопределения

На твердой стенке $y = 0$:

$$U(0, \tau) = 0, \quad A(0, \tau) = A(\tau), \quad H_y(0, \tau) + \text{Sr} A_y(0, \tau) = 0. \quad (26)$$

На свободной границе $y = 1$ выполнены условия:

$$\frac{dL}{d\tau} = -2L \int_0^1 U(y, \tau) dy; \quad (27)$$

$$A_y + L \text{Bi}(A - A_{gas}) = 0; \quad (28)$$

$$-\frac{1}{2L} U_y = \text{Ma} A + \text{Mc} H; \quad (29)$$

$$H_y + \text{Sr} A_y = 0, \quad (30)$$

где $\text{Bi} = \gamma l_0 / k$ — число Био, $\text{Ma} = \alpha_1 \bar{T} l_0 / \rho \nu^2$ — тепловое число Марангони, $\text{Mc} = \alpha_2 \bar{c} l_0 / \rho \nu^2$ — концентрационное число Марангони.

Начальные условия при $\tau = 0$:

$$U(y, 0) = U_0(y), \quad A(y, 0) = A_0(y), \quad H(y, 0) = H_0(y), \quad (31)$$

$$L(0) = 1, \quad F(0) = F^0.$$

$$\int_0^1 U(y, \tau) dy = 0, \quad y = 1; \quad (32)$$

Стационарное решение

Связь между температурами имеется следующая:

$$A = -\frac{\text{Bi} A_{gas}^0}{\text{Bi} + 2}. \quad (35)$$

Тогда искомые функции имеют вид:

$$A^0(y) = A(1 - 2y); \quad (36)$$

$$H^0(y) = ASr(2y - 1); \quad (37)$$

$$U^0(y) = \frac{F^0}{6}(2y - 3y^2); \quad (38)$$

$$F^0 = 3A(MSr - 1). \quad (39)$$

Определение поля температур

Для решения нестационарной задачи применяется метод преобразования Лапласа. Положим (при условии существования \tilde{A} , \tilde{A}_y , \tilde{A}_{yy} , \tilde{A}_{gas}):

$$\tilde{A}(y, p) = \int_0^{\infty} A(y, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad (42)$$

тогда задача для $A(y, \tau)$ сводится к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\tilde{A}_{yy} - \text{Pr} p \tilde{A} = -\text{Pr} A_0(y), \quad 0 < y < 1; \quad (43)$$

$$\tilde{A}(0, p) = \tilde{A}(p), \quad y = 0; \quad (44)$$

$$\tilde{A}_y + \text{Bi}(\tilde{A} - \tilde{A}_{gas}) = 0, \quad y = 1; \quad (45)$$

Общее решение уравнения (43) находится следующим образом:

$$\tilde{A} = C_1 \text{ch} \sqrt{\text{Pr} p} y + C_2 \text{sh} \sqrt{\text{Pr} p} y + \frac{\sqrt{\text{Pr} p}}{p} \int_0^y A_0(x) \text{sh} \left[\sqrt{\text{Pr} p} (x - y) \right] dx; \quad (46)$$

Обратное преобразование Лапласа

Оригинал $A(y, \tau)$ восстанавливается по формуле:

$$A(y, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \tilde{A}(y, p) e^{p\tau} dp. \quad (47)$$

Определение концентрации смеси

Применяя к начально-краевой задаче для концентрации смеси преобразование Лапласа, получим для изображения $\tilde{H}(y, p)$ задачу

$$\tilde{H}_{yy} - Scp\tilde{H} = -ScH_0(y) + SrPr A_0(y) - SrPrp\tilde{A}, \quad 0 < y < 1; \quad (53)$$

$$\tilde{H}_y + Sr\tilde{A}_y = 0, \quad y = 0; \quad (54)$$

$$\tilde{H}_y + Sr\tilde{A}_y = 0, \quad y = 1; \quad (55)$$

Общее решение уравнения (53) при $Pr \neq Sc$ представляется так:

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & C_5 \operatorname{ch} \sqrt{Scp} y + C_6 \operatorname{sh} \sqrt{Scp} y + \\ & + \frac{1}{\sqrt{Scp}} \int_0^y (ScH_0(x) - SrPrA_0(x)) \operatorname{sh} \left[\sqrt{Scp} (x - y) \right] dx - \\ & - \frac{SrPr}{Pr - Sc} \left(C_1 \operatorname{ch} \sqrt{Prp} y + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{Prp} y + \frac{\sqrt{Prp}}{p} \int_0^y A_0(x) \operatorname{sh} \left[\sqrt{Prp} (x - y) \right] dx \right), \end{aligned} \quad (56)$$

Определение поля скоростей

Применение преобразования Лапласа к задаче для скорости сводит ее к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\tilde{U}_{yy} - p\tilde{U} = -U_0(r) - \tilde{F}(p), \quad 0 < y < 1; \quad (62)$$

$$\tilde{U}(0, p) = 0, \quad y = 0; \quad (63)$$

$$\int_0^1 \tilde{U} dy = 0, \quad y = 1; \quad (64)$$

$$\tilde{U}_y = -2(\tilde{A} + M\tilde{H}), \quad y = 1; \quad (65)$$

Общее решение уравнения (62) выписывается следующим образом:

$$\tilde{U} = C_9 \operatorname{ch}\sqrt{p}y + C_{10} \operatorname{sh}\sqrt{p}y + \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^y U_0(x) \operatorname{sh}\left[\sqrt{p}(x-y)\right] dx; \quad (66)$$

с постоянными C_9 и C_{10} , определяемыми из граничных условий (63)–(65):

$$C_9 = -\frac{\tilde{F}(p)}{p}, \quad (67)$$

$$C_{10} = \frac{2(\tilde{A} + M\tilde{H}) + \sqrt{p} \int_0^1 U_0(x) \operatorname{ch}\sqrt{p}(x-1) dx + \tilde{F}(p) \operatorname{sh}\sqrt{p}}{p \operatorname{ch}\sqrt{p}}, \quad (68)$$

где функции $\tilde{A}(y, p)$, $\tilde{H}(y, p)$ даются формулами (46), (56) при $y = 1$, а функция $\tilde{F}(p)$ — градиент давления — находится так:

$$\tilde{F}(p) = \left[\sqrt{p} \operatorname{ch}\sqrt{p} - \operatorname{sh}\sqrt{p} \right]^{-1} \left\{ \sqrt{p} (\operatorname{ch}\sqrt{p} - 1) (2\tilde{A} + 2M\tilde{H} - \int_0^1 U_0(x) \operatorname{ch}\sqrt{p}(x-1) dx) - p \operatorname{ch}\sqrt{p} \int_0^1 \left[\int_0^y U_0(x) \operatorname{ch}\sqrt{p}(x-1) dx \right] dy \right\}. \quad (69)$$

Сходимость к стационарному решению

Теорема . Решения задач для функций $A(y, \tau)$, $B(y, \tau)$, $H(y, \tau)$, $G(y, \tau)$, $U(y, \tau)$ определяются путем обращения преобразования Лапласа и с ростом времени они выходят на стационарный режим, если $A_{gas}(\tau) \rightarrow A_{gas}^0$, $B_{gas}(\tau) \rightarrow B_{gas}^0$, $A(\tau) \rightarrow A$, $B(\tau) \rightarrow B$ при $\tau \rightarrow \infty$ и выполняется условие (35).

Численное решение

Полученные формулы в изображениях по Лапласу были использованы для численного нахождения полей скорости, температуры и концентрации смеси при определенных условиях, налагаемых на внешнюю температуру $A_{gas}(\tau)$ и температуру твердой стенки $A(\tau)$. Для этого применялся метод численного обращения преобразования Лапласа, с помощью которого были получены количественные результаты для модельной системы со следующими значениями параметров: $A_{gas}^0 = 0.2$, $Sr = 3$, $Bi = 2$, $Pr = 2$, $Sc = 1$, $M = 100$, $A_{gas}(\tau) = A_{gas}^0 + \exp(-\lambda\tau) \sin(\omega\tau)$, $A(\tau) = A + \exp(-\lambda\tau) \sin(\omega\tau)$, где $\omega = 1$.

Профиль температуры при $\lambda = 1$

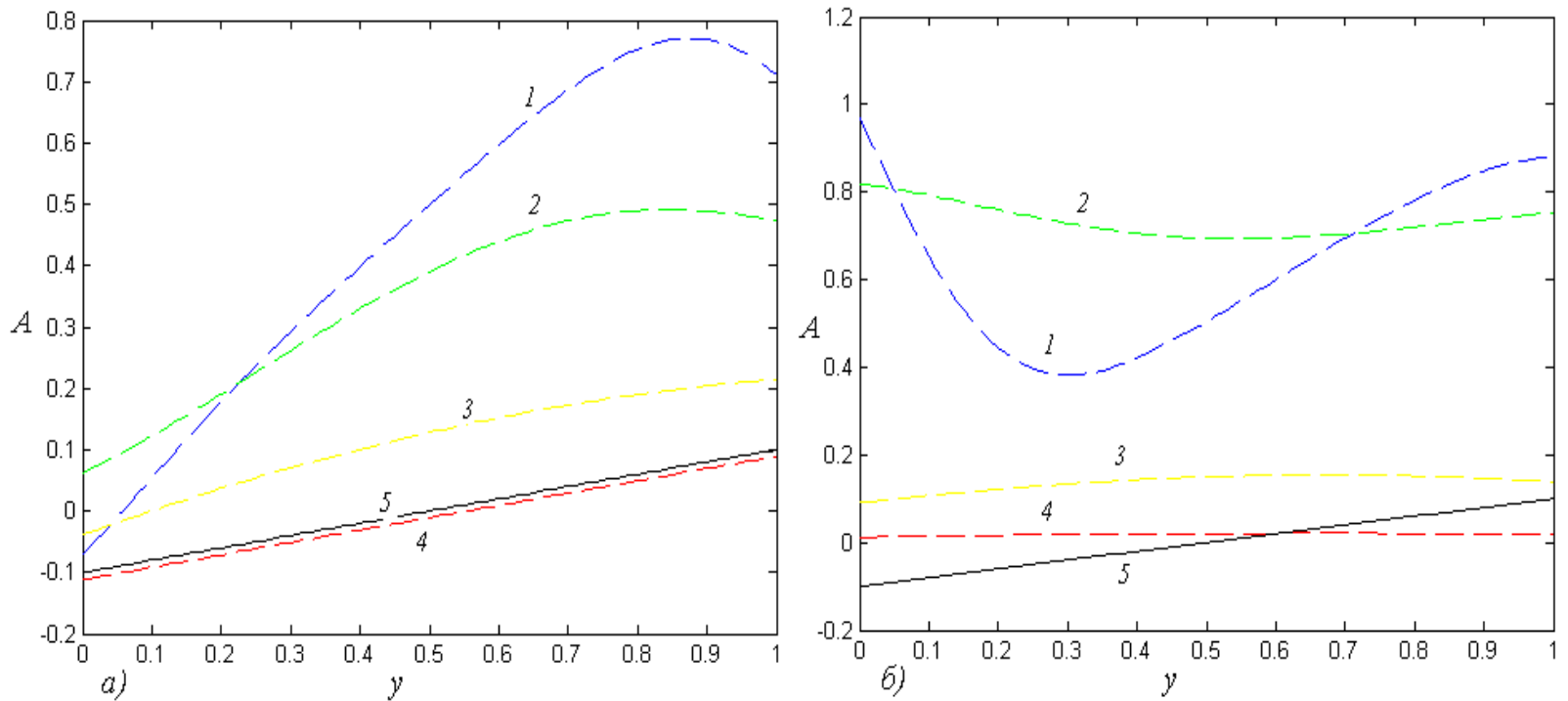


Рис. 2: Профиль температуры при $\lambda = 1$: 1 - $\tau = 0.02$, 2 - $\tau = 0.2$, 3 - $\tau = 2.4$, 4 - $\tau = 4.5$, 5 - стационарное решение.

Профиль концентрации при $\lambda = 1$

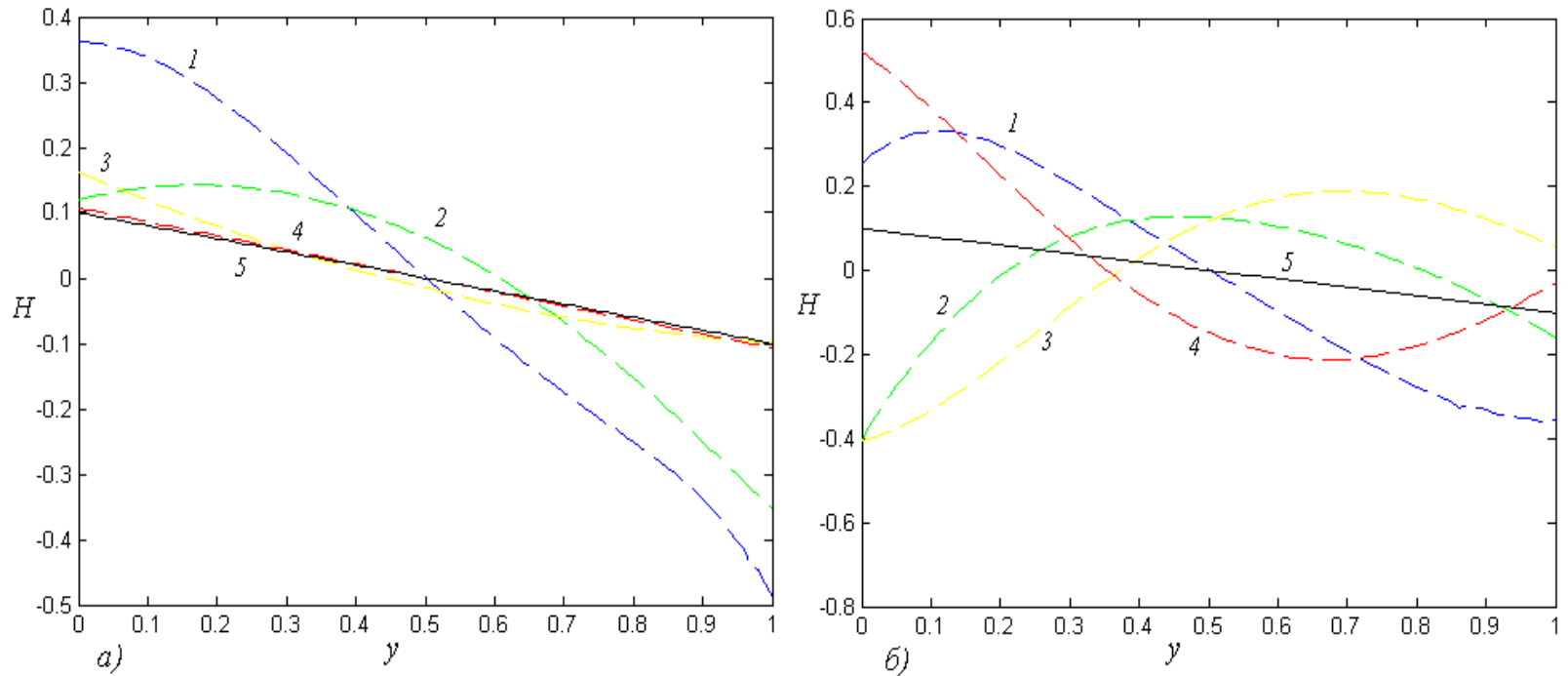


Рис. 3: Профиль концентрации при $\lambda = 1$: 1 - $\tau = 0.02$, 2 - $\tau = 0.2$, 3 - $\tau = 1.7$, 4 - $\tau = 4.8$, 5 - стационарное решение.

Профиль скорости при $\lambda = 1$

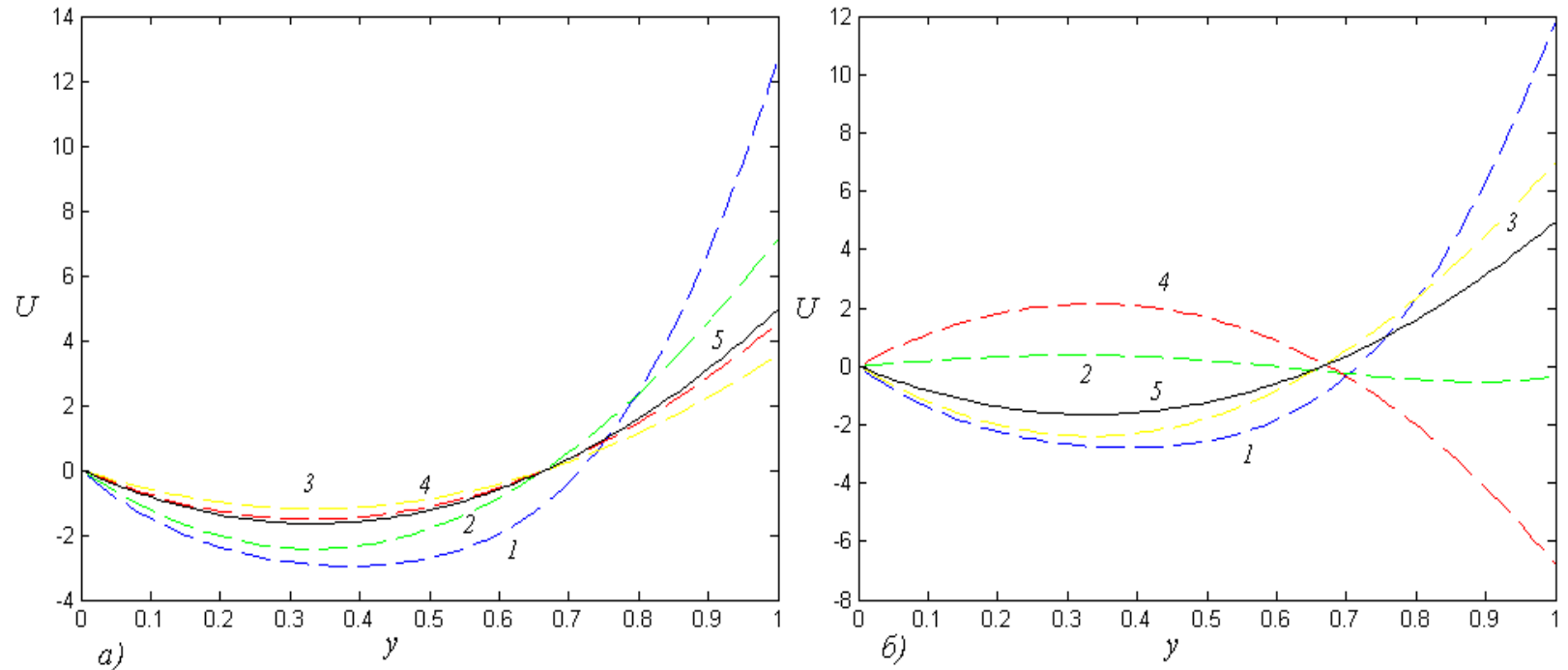


Рис. 4: Профиль скорости при $\lambda = 1$: 1 - $\tau = 0.04$, 2 - $\tau = 1.0$, 3 - $\tau = 1.4$, 4 - $\tau = 3.14$, 5 - стационарное решение.

Профили температуры и концентрации при $\lambda = 0.001$

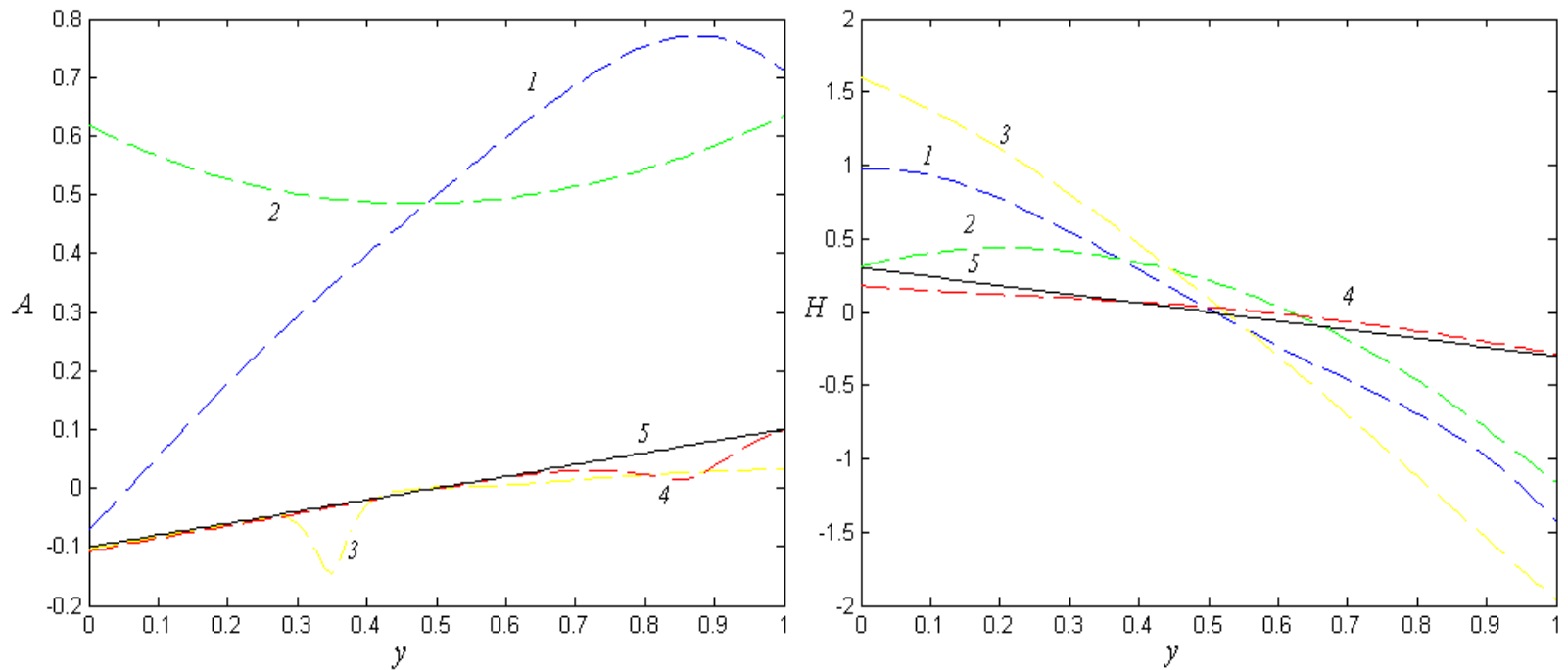


Рис. 5: Профиль температуры $A(y, \tau)$ и концентрации $H(y, \tau)$ при $\lambda = 10^{-3}$: 1 – $\tau = 0.03$, 2 – $\tau = 0.3$, 3 – $\tau = 35.6$, 4 – $\tau = 37.85$, 5 – стационарное решение.

Профиль скорости при $\lambda = 0.001$

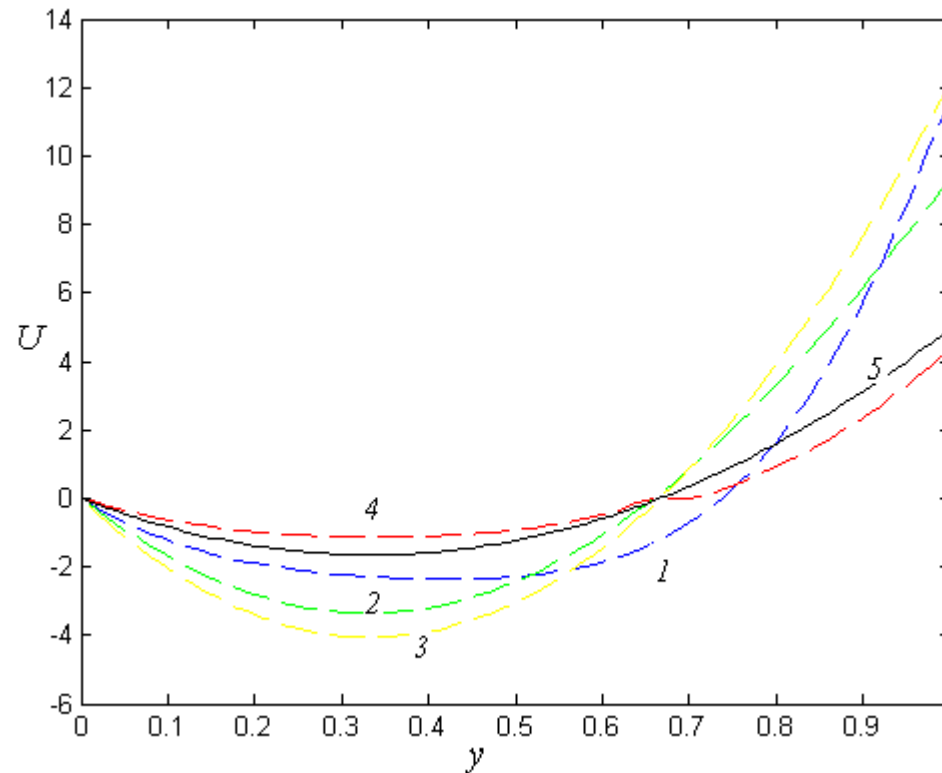


Рис. 6: Профиль скорости при $\lambda = 10^{-3}$; 1 - $\tau = 0.5$, 2 - $\tau = 4.5$, 3 - $\tau = 35.2$, 4 - $\tau = 37.8$, 5 - стационарное решение.

Профиль скорости при различных значениях параметра M

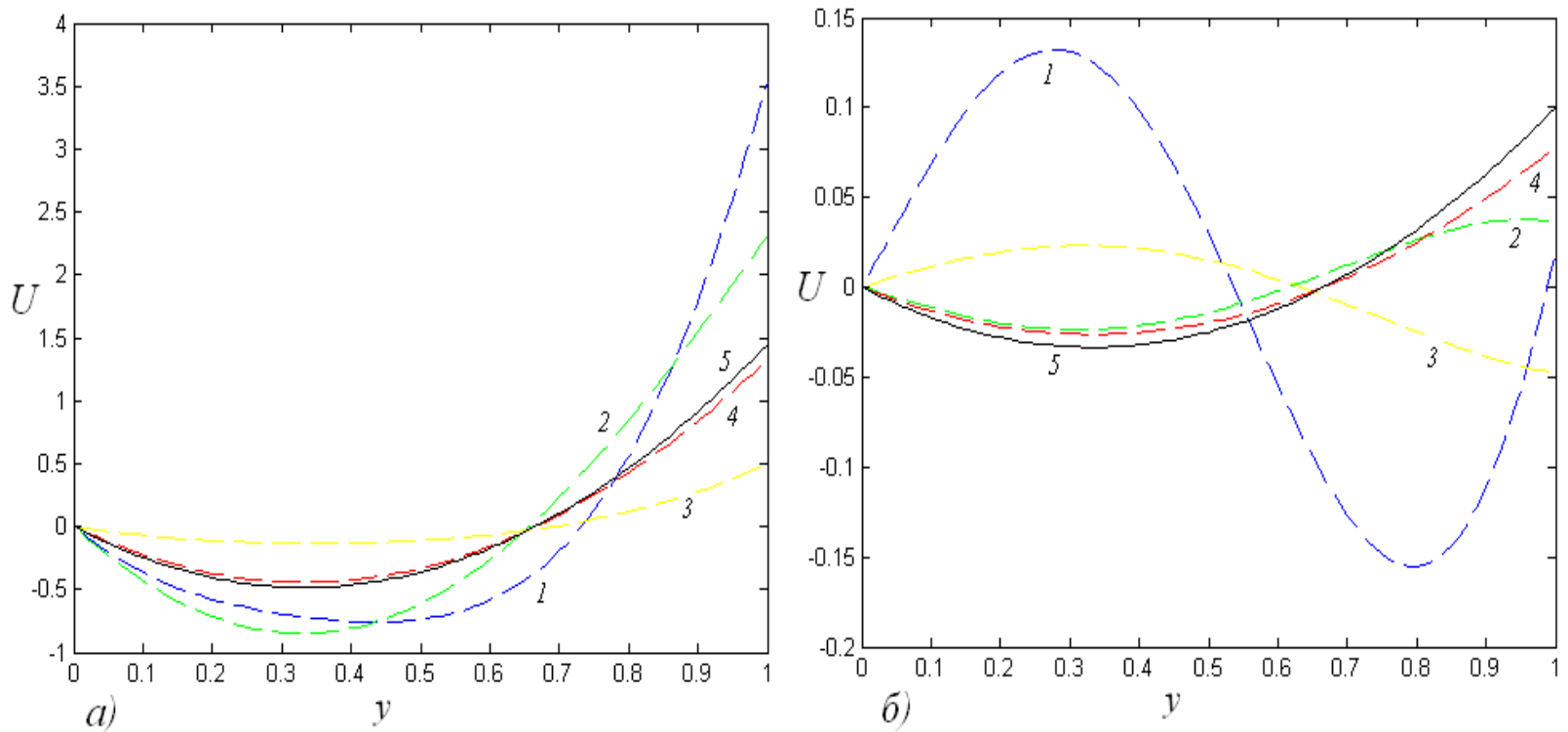


Рис. 7: Профиль скорости при различных значениях параметра M : а) $M = 10$, б) $M = 1$.

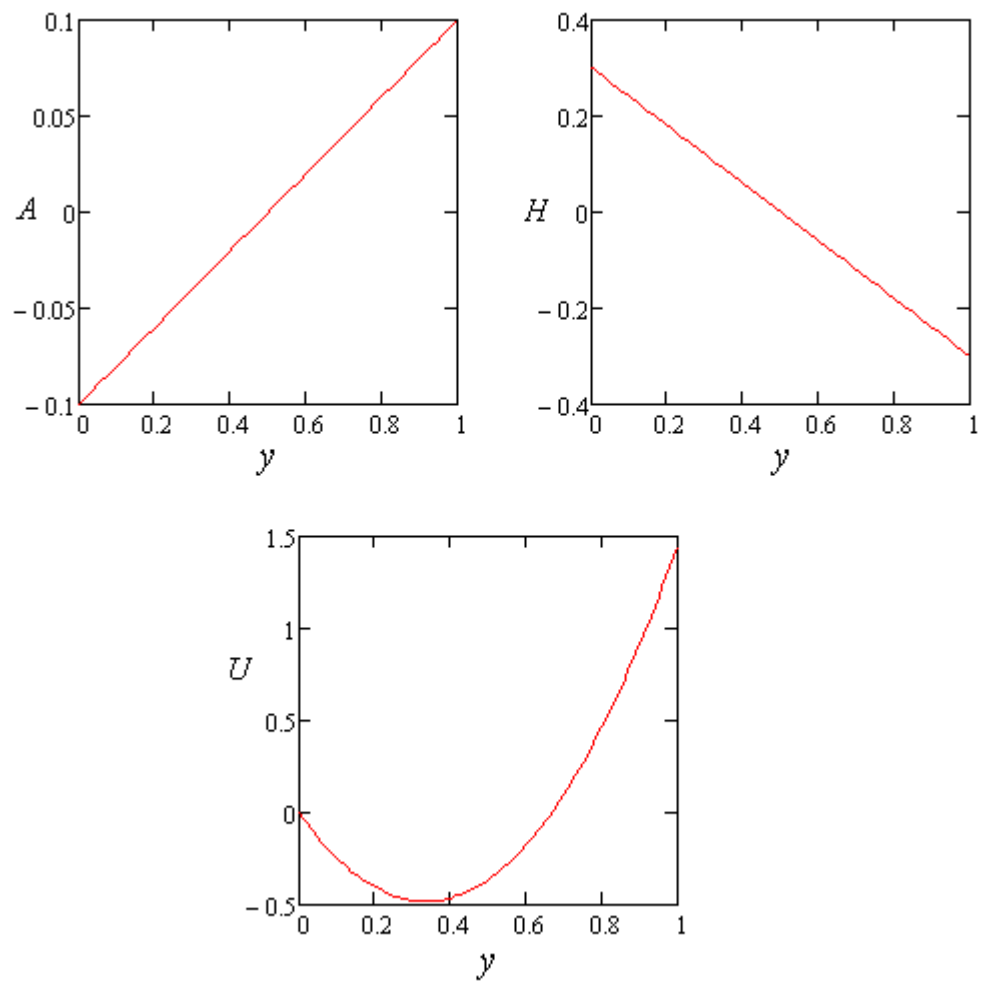


Рис. 8: Профиль температуры $A(y)$, концентрации $H(y)$ и скорости $U(y)$.

Линии тока

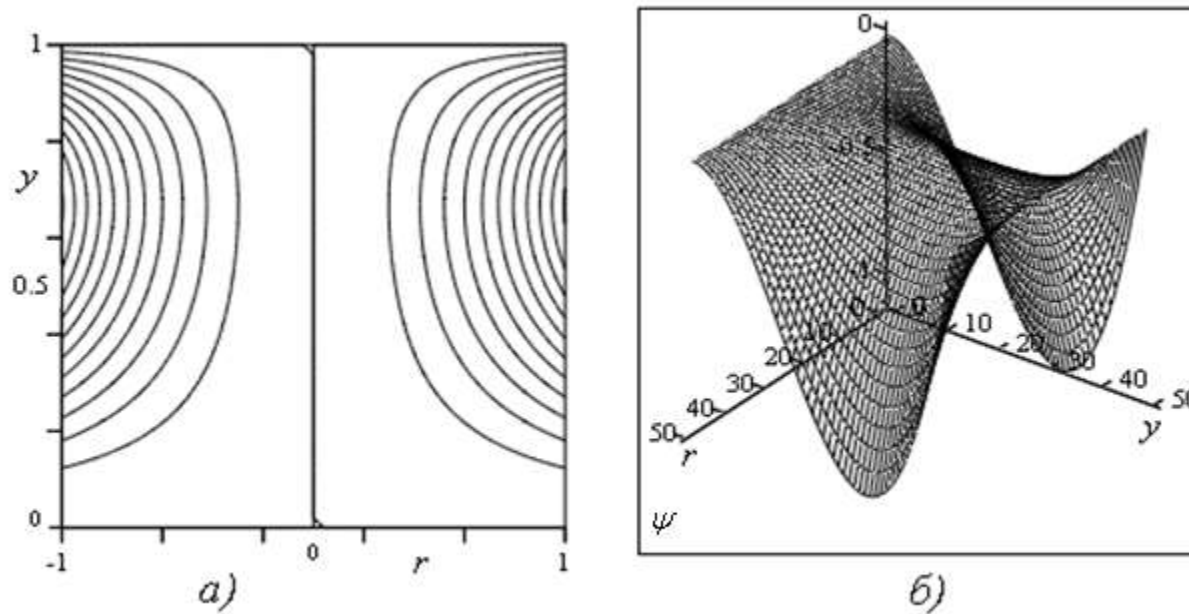


Рис. 9: а) – траектории жидких частиц, б) – функция тока.

- 
- **Спасибо за внимание!**